MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da aula de 8/7`

I) Funções de Variação Limitada (cont.)

Teorema 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

i) $f \in \mathrm{BV}$ ***see*** $\mathrm{Re}\, f \in \mathrm{BV}$ e $\mathrm{Im}\, f \in \mathrm{BV}$.

ii) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estiver em BV, $T_f \pm f$ são crescentes e limitadas (portanto estão em BV).

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertence a BV ***see*** for a diferença de duas funções crescentes e limitadas. Em caso afirmativo, podemos tomar estas funções como sendo $\frac{1}{2}(T_f + f)$ e $\frac{1}{2}(T_f - f)$. Aproveitemos o ensejo para definir:

Definição 1. Com a notação acima, se $f \in \mathrm{BV}$ for a valores reais, $v^+ f \doteq \frac{1}{2}(T_f + f)$ e $v^- f \doteq \frac{1}{2}(T_f - f)$ chamam-se, respectivamente, *variação positiva* e *negativa* de f.

Além disso, se $f \in \mathrm{BV}$:

iv) existem e são finitos $f(x+)$ e $f(x-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, bem como $f(\pm\infty)$. O conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

v) pondo $g(x) \doteq f(x+)$, f e g coincidem quase sempre (com respeito à medida de Lebesgue), são deriváveis quase sempre e suas derivadas coincidem quase sempre.

vi) $T_f(-\infty) = 0$. Além disso, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x\pm) - f(x)| = |T_f(x\pm) - T_f(x)|$. Portanto, f é contínua à direita (respectivamente, à esquerda) em x ***see*** T_f o for.

vii) se f tomar valores reais e for contínua à direita (respectivamente, à esquerda) em $x \in \mathbb{R}$, suas variações positiva e negativa também o são.

Demonstração. i) Não há o que fazer.

ii) Sejam $x < y$ reais. Então $|f(y) - f(x)| \leq \mathrm{var}_{[x,y]}(f) = T_f(y) - T_f(x)$, de modo que:

(a) $f(y) - f(x) \leq T_f(y) - T_f(x)$, portanto $T_f(x) - f(x) \leq T_f(y) - f(y)$, donde se conclui que $T_f - f$ é crescente.

(b) $f(x) - f(y) \leq T_f(y) - T_f(x)$, portanto $T_f(x) + f(x) \leq T_f(y) + f(y)$, donde se conclui que $T_f + f$ é crescente.

Além disso, fixado $a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq T_f(x) - T_f(a) + |f(a)|$, o que implica f limitada, pois T_f o é. Então $T_f \pm f$ são limitadas.

iii) É corolário do item anterior e do exemplo da aula anterior, parte a).

iv) Basta observar que a afirmação vale para as variações positiva e negativa de $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$, tendo em vista a proposição "diferenciabilidade de funções crescentes" (c.f. notas da aula 21).

v) Idem.

vi) Fixe $a \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $-\infty < x_0 < \cdots < x_N = a$ tais que $T_f(a) < \sum_{j=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \epsilon \leq \mathrm{var}_{[x_0,a]}(f) + \epsilon = T_f(a) - T_f(x_0) + \epsilon$. Portanto, $T_f(x_0) < \epsilon$, donde $T_f(x) < \epsilon$ se $x \leq x_0$, i.e. $T_f(-\infty) = 0$.

Para todo $x < a$, $T_f(x) + |f(x) - f(a)| \leq T_f(a)$. Tomando $\lim_{x\to a^-}$, conclui-se que $T_f(a-) + |f(a-) - f(a)| \leq T_f(a)$, de modo que $|f(a-) - f(a)| \leq T_f(a) - T_f(a-)$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, fixe $x_0 < a$ e tome $x_0 < x_1 < \cdots < x_N = a$ tais que $T_f(a) - T_f(x_0) < \sum_{j=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \epsilon$. Então, para todo $x \in (x_{N-1}, a)$:

$$\begin{aligned}
T_f(x) - T_f(x_0) + |f(x) - f(a)| &\geq T_f(x_{N-1}) - T_f(x_0) + |f(x_{N-1}) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq \\
&\geq \sum_{j=1}^{N-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{N-1}) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq \\
&\geq \sum_{j=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > T_f(a) - T_f(x_0) - \epsilon
\end{aligned}$$

donde $|f(x)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(x)-\epsilon$. Tomando $\lim_{x\to a^-}$, conclui-se que $|f(a-)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(a-)-\epsilon$. Daí, pela arbitrariedade do ϵ positivo tomado, segue-se $|f(a-)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(a-)$.

Portanto, $|f(a-)-f(a)| = T_f(a)-T_f(a-)$. Analogamente se prova $|f(a+)-f(a)| = T_f(a+)-T_f(a)$. Estas duas igualdades mostram que f é contínua à esquerda (respectivamente, à direita) em a **see** T_f for contínua à esquerda (respectivamente, à direita) em a.

vii) Se f for contínua à direita (resp., à esquerda) em $x \in \mathbb{R}$, T_f também o é, pelo item anterior. Então $T_f \pm f$ são contínuas à direita (resp., à esquerda) em x.

□

Definição 2. Diz-se que $f \in$ NBV (i.e. "normalized" BV) se $f \in$ BV, $f(-\infty) = 0$ e f contínua à direita.

Corolário 1. Se $f \in$ BV e $\tilde{f} \doteq g - f(-\infty)$, onde $g(x) \doteq f(x+)$, então $\tilde{f}$ pertence a NBV; $\tilde{f}$ chama-se *normalizada* de f.

Demonstração. Pela proposição "diferenciabilidade de funções crescentes" (c.f. notas da aula 21), $x \mapsto v^+(\operatorname{Re} f)(x+)$ e $x \mapsto v^-(\operatorname{Re} f)(x+)$ são funções crescentes e contínuas a direita. São limitadas, trivialmente, pois $\operatorname{Re} f$ o é. Então, como $(\forall x \in \mathbb{R}) \operatorname{Re} g(x) = \operatorname{Re} f(x+) = v^+(\operatorname{Re} f)(x+) - v^-(\operatorname{Re} f)(x+)$, conclui-se que $\operatorname{Re} g$ é contínua à direita, e segue-se do teorema 1, parte iii), que $\operatorname{Re} g$ está em BV. Analogamente, prova-se que $\operatorname{Im} g$ está em BV e é contínua à direita. Finalmente, $g(-\infty) = f(-\infty)$, de modo que $\tilde{f}(-\infty) = 0$, é contínua à direita e está em BV. □