

I) **Diferenciação em Espaços Euclidianos (continuação).** Recordando: demonstramos na aula passada o teorema abaixo.

TEOREMA 1 (teorema de diferenciação de Lebesgue, versão 1). Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$, onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Então, para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f \, dm \quad (1)$$

Podemos reescrever (1) como:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} [f(y) - f(x)] \, dm(y) = 0$$

o que vale, conforme acabamos de provar, para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Verificaremos, a seguir, que vale algo mais forte: para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a igualdade acima vale com $|f(y) - f(x)|$ no lugar de $f(y) - f(x)$.

DEFINIÇÃO 1 (pontos de Lebesgue). Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$. Diz-se que $x \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de Lebesgue* de f (NOTAÇÃO: $x \in L_f$) se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dm(y) = 0 \quad (2)$$

TEOREMA 2. Se $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$, então o complementar do conjunto dos pontos de Lebesgue de f tem medida de Lebesgue zero.

Demonstração. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto enumerável denso. Para cada $c \in D$, $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - c| \, dm(y) = |f(x) - c|$ para x no complementar de um conjunto nulo $E_c \subset \mathbb{R}^n$; isso decorre do teorema de diferenciação de Lebesgue 1 aplicado a $|f - c|$. Então $E \doteq \cup_{c \in D} E_c$ é um conjunto nulo; afirmo que todo ponto no complementar de E é de Lebesgue.

Com efeito, seja $x \in E^c$. Dado $\epsilon > 0$, tome $c \in D$ tal que $|f(x) - c| < \epsilon$. Então, $\forall r > 0$, $\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dm(y) \leq \int_{B(x,r)} |f(y) - c| \, dm(y) + |c - f(x)|$, donde $\limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dm(y) \leq 2|f(x) - c| = 2\epsilon$. $\square$

Consideraremos, a seguir, médias em conjuntos mais gerais que bolas.

DEFINIÇÃO 2. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que uma família $(E_r)_{r>0} \prec \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ converge *agradavelmente* para x se:

agradável.i) $\forall r > 0$, $E_r \subset B(x, r)$.

agradável.ii) Existe $\alpha > 0$ tal que $\forall r > 0$, $m(E_r) > \alpha m(B(x, r))$.

TEOREMA 3 (teorema de diferenciação de Lebesgue, versão 2). Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$. Então, para todo ponto x no conjunto de Lebesgue de f (portanto, para m -quase todo ponto), e para toda família $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x , tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| \, dm(y) = 0. \quad (3)$$

Demonstração. Sejam $x \in L_f$ e $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x . Tome $\alpha > 0$ conforme a segunda condição da definição 2. Então, $\forall r > 0$:

$$\frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| \, dm(y) \leq \frac{1}{\alpha m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| \, dm(y) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

$\square$

Finalmente, será apresentada uma versão do teorema de diferenciação de Lebesgue para medidas.

DEFINIÇÃO 3. Uma medida positiva μ em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ diz-se *de Radon* se for finita nos compactos. Uma medida ν com sinal ou complexa em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ diz-se *de Radon* se sua variação total $|\nu|$ o for.

O lema abaixo será provado mais adiante, quando do estudo das medidas de Radon em espaços localmente compactos.

LEMA 1. Seja μ medida de Radon positiva em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Então, para todo boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(E) = \inf\{\mu(\mathcal{U}) : E \subset \mathcal{U} \text{ aberto}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset\subset E\}$.

TEOREMA 4 (teorema de diferenciação de Lebesgue para medidas). Sejam ν medida de Radon com sinal ou complexa em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ e $\nu = \lambda + f dm$ a sua decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodym com respeito à medida de Lebesgue m . Então, para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, e para toda família de borelianos $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x , tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x) \quad (4)$$

Demonstração. Note que $|\nu| = |\lambda| + |f| dm$. Assim, por ser ν de Radon, suas partes singular e absolutamente contínuas também o são, de modo que f é, necessariamente, localmente integrável.

Como $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$, segue-se do teorema 3 que, para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $(E_r)_{r>0}$ agradável para x , $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{E_r} f dm = f(x)$. Então basta verificar que, para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $(E_r)_{r>0}$ agradável para x :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} = 0 \quad (5)$$

Podemos supor λ positiva e $E_r = B(x, r)$, pois, tomando α como na definição 2:

$$\left| \frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} \right| \leq \frac{|\lambda|(E_r)}{m(E_r)} \leq \frac{|\lambda|(B(x, r))}{\alpha m(B(x, r))}$$

Suponha, pois, λ medida positiva de Radon tal que $\lambda \perp m$. Seja A boreliano tal que $\lambda(A) = 0 = m(A^c)$. Queremos provar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, pondo:

$$F_k \doteq \{x \in A : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} > \frac{1}{k}\}$$

tem-se $m(F_k) = 0$ (pois (5) vale no complementar de $A^c \cup \cup_{k \in \mathbb{N}} F_k$).

Como λ é de Radon, dado $\epsilon > 0$, existe U_ϵ aberto tal que $A \subset U_\epsilon$ e $\lambda(U_\epsilon) < \epsilon$. Para cada $x \in F_k$, escolha $B_x \subset U_\epsilon$ bola aberta centrada em x tal que $\lambda(B_x) > \frac{1}{k} m(B_x)$. Seja $V_\epsilon \doteq \cup_{x \in F_k} B_x$, de modo que $F_k \subset V_\epsilon \subset U_\epsilon$. Se $c < m(V_\epsilon)$, pelo corolário do lema de cobertura de Wiener, podemos escolher uma subcoleção finita $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ de bolas disjuntas de $(B_x)_{x \in F_k}$ tal que $\sum_{i=1}^N m(B_i) > 3^{-n} c$. Portanto:

$$c < 3^n \sum_{i=1}^N m(B_i) \leq k 3^n \sum_{i=1}^N \lambda(B_i) = k 3^n \lambda\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) \leq k 3^n \lambda(U_\epsilon) < k 3^n \epsilon$$

donde $m(V_\epsilon) < k 3^n \epsilon$, o que implica $m(F_k) < k 3^n \epsilon$. Pela arbitrariedade de ϵ , segue-se $m(F_k) = 0$, como afirmado. $\square$