

# MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Notas da Aula 2 (4/3)

## I) Aplicações Mensuráveis (continuação)

PROPOSIÇÃO 1. Sejam  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos e  $\phi : X \rightarrow Y$  contínua. Então  $\phi : (X, \mathcal{B}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{B}_Y)$  é mensurável.

PROPOSIÇÃO 2 ( $\sigma$ -álgebra induzida por uma família de aplicações). Sejam  $X$  um conjunto,  $(Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$  família de espaços mensuráveis e  $(X \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ . Então existe uma menor  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$  em  $X$  que torna,  $\forall \alpha \in A$ ,  $f_\alpha$  mensurável. Além disso, se  $(\forall \alpha \in A) \mathcal{A}_\alpha = \sigma(S_\alpha)$ ,  $\mathcal{M} = \sigma(\{V \subset X : \exists \alpha \in A, \exists D \in S_\alpha, V = f_\alpha^{-1}(D)\})$ .

DEFINIÇÃO 1. A menor  $\sigma$ -álgebra cuja existência é assegurada pela proposição acima chama-se  $\sigma$ -álgebra induzida pela família  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ .

PROPOSIÇÃO 3. Com a notação da definição e proposição acima, sejam,  $(Z, \mathcal{C})$  espaço mensurável e  $\phi : Z \rightarrow Y$

$$(Z, \mathcal{C}) \xrightarrow{\phi} (X, \mathcal{B}) \xrightarrow{f_\alpha} (Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$$

Então  $\phi : (Z, \mathcal{C}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$  é mensurável *see*  $(\forall \alpha \in A) f_\alpha \circ \phi$  for mensurável.

### Casos Particulares:

**$\sigma$ -álgebra produto:** Seja  $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$  família de espaços mensuráveis. Em  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  consideramos a  $\sigma$ -álgebra induzida pela família  $(\text{pr}_\alpha : X \rightarrow X_\alpha)_{\alpha \in A}$ , a qual chamamos de  $\sigma$ -álgebra produto e denotamos por  $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$ .

OBSERVAÇÃO. Na situação acima, suponha que, para cada  $\alpha \in A$ ,  $D_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ . É verdade que  $\prod_{\alpha \in A} D_\alpha \in \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$ ? Em geral, não. Se  $A$  for enumerável, sim: neste caso, basta observar que  $\prod_{\alpha \in A} D_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \text{pr}_\alpha^{-1}(D_\alpha)$  é uma interseção enumerável de mensuráveis.

PROPOSIÇÃO 4. Com a notação acima, se  $A$  for enumerável, o conjunto  $\{\prod_{\alpha \in A} D_\alpha : \forall \alpha, D_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}$  gera  $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$ .

PROPOSIÇÃO 5.  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . Mais geralmente,  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

OBSERVAÇÃO. Mais geralmente, sejam  $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$  família de espaços topológicos e  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  com a topologia produto. Tem-se:

1.  $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{B}_{X_\alpha} \subset \mathcal{B}_X$
2. Vale a outra inclusão se  $A$  enumerável e  $(\forall \alpha \in A) \tau_\alpha$  tiver base enumerável (ou, equivalentemente, se a topologia produto tiver base enumerável).

**Pullback:** Seja  $(Y, \mathcal{A})$  espaço mensurável e  $f : X \rightarrow Y$ . A  $\sigma$ -álgebra em  $X$  induzida por  $\{f\}$  chama-se *pullback* de  $\mathcal{A}$  e é denotada por  $f^* \mathcal{A}$ .

Note que  $f^* \mathcal{A} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{A}\}$ .

Caso particular: suponha  $X \subset Y$  e  $f = i$  a inclusão de  $X$  em  $Y$ . O *pullback*  $i^* \mathcal{A}$  coincide com  $\{B \cap X : B \in \mathcal{A}\}$  e é chamado de *restrição* ou *traço* de  $\mathcal{A}$  em  $X$ , denotado por  $\mathcal{A}|_X$ . Em particular, se  $X \in \mathcal{A}$ , então  $\mathcal{A}|_X = \{B \in \mathcal{A} | B \subset X\}$ .

PROPOSIÇÃO 6. Sejam  $(X, \mathcal{M})$  espaço mensurável e  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  mensuráveis. Então  $fg$  e  $f + g$  são mensuráveis.

## II) Medidas

DEFINIÇÃO 2. Seja  $X$  um conjunto,  $\emptyset \in S \subset \mathbb{P}(X)$ .

- (i) Uma *medida em  $S$*  é uma função de conjunto  $\sigma$ -aditiva  $\mu : S \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Uma *medida finitamente aditiva em  $S$*  é uma função de conjunto finitamente aditiva  $\mu : S \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $\mu(\emptyset) = 0$

*Exemplo 1.* 1. Sejam  $X$  conjunto,  $\mathcal{M} = 2^X$  e  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\mu(A) \doteq |A|$  se  $A$  finito e  $\mu(A) = \infty$  caso contrário. Então  $\mu$  é uma medida, chamada *medida de contagem* em  $X$ . Qualquer restrição de  $\mu$  também é chamada pelo mesmo nome.

- 2. Sejam  $X$  conjunto,  $\mathcal{M} = 2^X$ ,  $x_0 \in X$  e  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\mu(A) \doteq 1$  se  $x_0 \in A$  e  $\mu(A) = 0$  caso contrário. Então  $\mu$  é uma medida, chamada *medida de Dirac* centrada em  $x_0$ , a qual se denota por  $\delta_{x_0}$ . Qualquer restrição de  $\delta_{x_0}$  também é chamada pelo mesmo nome.

DEFINIÇÃO 3. Seja  $(X, \mathcal{A})$  espaço mensurável e  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  medida. A terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  chama-se *espaço de medida*. Diz-se que  $\mu$  é:

- (i) *semi-finita* se  $\forall A \in \mathcal{A} | \mu(A) = \infty, \exists B \in \mathcal{A} | B \subset A$  e  $0 < \mu(B) < \infty$
- (ii)  *$\sigma$ -finita* se  $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec A$  tal que

$$\begin{cases} (\forall n) \mu(A_n) < \infty \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \end{cases}$$

- (iii) *finita* se  $\mu(X) < \infty$
- (iv) *de probabilidade* se  $\mu(X) = 1$

- Observação: É claro que (iv)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (ii). Também vale (ii)  $\Rightarrow$  (i).
- Mais gerlamente, dado  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  espaço de medida e  $A \in \mathcal{A}$ , diz-se que  $A$  é  $\sigma$ -finito com respeito a  $\mu$  se  $A$  puder ser coberto por uma reunião enumerável de mensuráveis de medida finita.