MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798`
`Notas da Aula de 24/6`

`I) Diferenciação em Espaços Euclidianos` Sejam m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $\nu \ll m$ uma medida com sinal ou complexa. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, seja

$$F(x) \doteq \lim_{r\to 0} \frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}\, \mathrm{d}m$$

definida para x tal que o limite acima existe. Gostaríamos de investigar a relação entre F e a derivada de Radon-Nikodym $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$. Por exemplo, se $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$ for uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, então $F = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$. O teorema de diferenciação de Lebesgue, a ser enunciado e provado logo mais, afirma que, se ν for uma medida de Radon (o que é equivalente a ser $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$ uma função *localmente integrável*, i.e. integrável em cada compacto de $\mathbb{R}^n$), então F coincide com $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$ m-quase sempre. Isso pode ser interpretado como uma formulação abstrata do Teorema Fundamental do Cálculo: dada uma função localmente integrável f em $\mathbb{R}^n$, a derivada da "integral indefinida" $f\,\mathrm{d}m$ com respeito à medida de Lebesgue m coincide com a própria f.

Notação: Dada B bola aberta em $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $\hat{B}$ a bola aberta concêntrica a B e com raio igual a 3 vezes o de B.

Teorema 1 (lema de cobertura de Wiener). Sejam K um compacto de $\mathbb{R}^n$ e $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma cobertura de K por bolas abertas. Então existe uma subcoleção finita $(B_i)_{1\le i\le N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $(\hat{B}_i)_{1\le i\le N}$ cobre K.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor, pela compacidade de K, A finito. Tome B_1 uma bola em $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ de raio máximo. Assuma escolhidas $B_1,\dots,B_N$ bolas abertas disjuntas de $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$. Se toda bola aberta de $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ intersectar $\cup_{i=1}^N B_i$, pare. Se não, escolha B_{N+1} uma bola aberta de $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ disjunta de $\cup_{i=1}^N B_i$ e de raio máximo. Como A é finito, para algum N suficientemente grande, o processo para, i.e. $(B_i)_{1\le i\le N}$ é uma subcoleção de bolas abertas disjuntas tal que toda bola aberta de $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ intersecta $\cup_{i=1}^N B_i$. Seja B uma tal bola em $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$; tome i_0 o menor dos índices i tais que $B\cap B_i \neq \emptyset$. Então $B \cap \cup_1^{i_0-1} B_i = \emptyset$, de modo que, pela construção de $(B_i)_i$, o raio de B é menor ou igual ao de B_{i_0}, donde $B \subset \hat{B}_{i_0}$. Portanto, $\cup_{\alpha\in A} B_\alpha \subset \cup_{1\le i\le N}\hat{B}_i$, donde $K \subset \cup_{1\le i\le N}\hat{B}_i$. □

Corolário 1. Seja $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma coleção de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ e $c\in\mathbb{R}$ tal que $m(\cup_{\alpha\in A}B_\alpha) > c$. Então existe uma subcoleção finita $(B_i)_{1\le i\le N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $m(\dot\cup_{1\le i\le N} B_i) > 3^{-n}c$.

Demonstração. Como $U \doteq \cup_{\alpha\in A}B_\alpha$ é $\mathcal{L}$-mensurável (pois é aberto), sabemos que $m(U) = \sup\{m(K) : K \subset\subset U\}$, c.f. notas da aula 13. Tome, pois, $K \subset\subset U$ tal que $m(K) > c$. Da cobertura por bolas abertas $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ do compacto K, podemos encontrar, pelo lema de cobertura de Wiener, uma subcoleção finita $(B_i)_{1\le i\le N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $(\hat{B}_i)_{1\le i\le N}$ cobre K. Então $c < m(K) \le m(\cup_{i=1}^N \hat{B}_i) \le \sum_{i=1}^N \hat{B}_i = 3^n \sum_{i=1}^N B_i = 3^n m(\dot\cup_{1\le i\le N} B_i)$, donde a tese. □

Definição 1. Seja f uma função em $\mathbb{R}^n$, Lebesgue-mensurável, a valores em $\mathbb{C}$ ou em $\overline{\mathbb{R}}$. Diz-se que f é *localmente integrável* (notação: $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$) se, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\int_K |f|\,\mathrm{d}m < \infty$.

Para $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$ e $A \in \mathcal{L}^n$ tal que $m(A) > 0$, definimos a *média de f em A*:

$$⨍_A f\,\mathrm{d}m \doteq \frac{1}{m(A)} \int_A f\,\mathrm{d}m$$

Proposição 1. Seja $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$. Como função de $(x,r) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, a média $⨍_{B(x,r)} f\,\mathrm{d}m$ é uma função contínua.

Demonstração. É claro que $(x,r) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \mapsto m\big(B(x,r)\big)$ é contínua. A continuidade de $(x,r) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \mapsto \int_{B(x,r)} f\,\mathrm{d}m$ é um corolário do teorema da convergência dominada, deixado como exercício; note que, se $(x_n,r_n) \to (x,r)$, $\chi_{B(x_n,r_n)}$ converge pontualmente para $\chi_{B(x,r)}$ exceto, possivelmente, nos pontos da esfera $S(x,r)$, i.e. a convergência se dá m-quase sempre. □

Corolário 2. Com a notação acima, dada $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$, a função $Hf : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ dada por $Hf(x) \doteq \sup\{⨍_{B(x,r)} |f|\,\mathrm{d}m : r > 0\}$ é semicontínua inferiormente; em particular, é boreliana.

Demonstração. Se X é um espaço topológico e $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família de funções semicontínuas inferiormente $X \to \overline{\mathbb{R}}$, então $f \doteq \sup_{\alpha\in A} f_\alpha$ é semicontínua inferiormente. Com efeito, $(\forall r\in\mathbb{R}) f^{-1}\big((r,\infty]\big) = \cup_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}\big((r,\infty]\big)$ é uma união de abertos, portanto é aberto. □

Definição 2. Com a notação do corolário acima, $H : f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m) \mapsto Hf$ chama-se *operador maximal de Hardy-Littlewood* e Hf a função maximal de Hardy-Littlewood associada a f.

O operador definido acima intervém, conforme veremos, no teorema de diferenciação de Lebesgue, em vista da desigualdade provada abaixo. Este operador também intervém em outros teoremas de diferenciação, como o teorema de Rademacher, que possivelmente faremos ao final do curso.

Teorema 2 (desigualdade maximal de Hardy-Littlewood). Existe uma constante $C = C(n)$ (dependendo apenas da dimensão n de $\mathbb{R}^n$) tal que, para toda $f \in \mathsf{L}^1(m)$ e para todo $\alpha > 0$, tem-se:

$$m(\{Hf > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1$$

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$ e $c < m(\{Hf > \alpha\})$. Para cada $x \in \{Hf > \alpha\}$, podemos escolher $r_x > 0$ tal que $⨍_{B(x,r_x)} |f| \,\mathrm{d}m > \alpha$. Como $\{B(x, r_x)\}_{x \in \{Hf > \alpha\}}$ cobre $\{Hf > \alpha\}$, obtém-se $c < m(\cup_{x \in \{Hf>\alpha\}} B(x, r_x))$. Portanto, pelo corolário 1, podemos extrair uma subcoleção finita $\{B_i \doteq B(x_i, r_i)\}_{1 \leq i \leq N}$ de $\{B(x, r_x)\}_{x \in \{Hf>\alpha\}}$ formada por bolas abertas disjuntas e tal que $\sum_{i=1}^N m(B_i) > 3^{-n}c$. Daí:

$$c < 3^n \sum_{i=1}^N m(B_i) < 3^n \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha} \int_{B_i} |f| \,\mathrm{d}m = \frac{3^n}{\alpha} \int_{\dot\cup_{i=1}^N B_i} |f| \,\mathrm{d}m \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1$$

Como c tal que $c < m(\{Hf > \alpha\})$ foi tomado arbitrariamente, obtém-se a tese com $C = 3^n$.

□

Teorema 3 (teorema de diferenciação de Lebesgue, versão 1). Seja $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$, onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Então, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \lim_{r \to 0} ⨍_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m \tag{1}$$

Demonstração. 1) Redução: podemos supor $f \in \mathsf{L}^1$. Com efeito, basta provar que, para todo $R > 0$, $\{x \in B(0, R) : \text{não vale } (1)\}$ tem medida nula. Para tal, podemos substituir f por $\chi_{B(0,R+1)} \cdot f \in \mathsf{L}^1$ sem alterar as médias nas bolas de raio 1 centradas em pontos de $B(0, R)$, de modo que, para esses pontos, a existência e o valor do limite no segundo membro de (1) não se altera, nem tampouco o valor de f nos tais pontos.

2) A igualdade (1) vale, trivialmente, em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ se f for contínua.

3) Sejam $f \in \mathsf{L}^1(m)$. Provemos que, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\limsup_{r\to 0} |⨍_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m - f(x)| = 0$, o que é equivalente a (1). Para tal, basta verificar que, para todo $\alpha > 0$, $E_\alpha \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} |⨍_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m - f(x)| > \alpha\}$ tem medida de Lebesgue zero; pois, nesse caso, (1) vale no complementar do conjunto nulo $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_{1/n}$. Fixe, pois, $\alpha > 0$. Dado $\epsilon > 0$, tome $g \in \mathsf{C_c}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$ (existe, pois $\mathsf{C_c}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathsf{L}^1(m)$, c.f. notas da aula 13). Dado $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se, $\forall r > 0$, $|⨍_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m - f(x)| \leq |⨍_{B(x,r)} (f - g) \,\mathrm{d}m| + |⨍_{B(x,r)} g \,\mathrm{d}m - g(x)| + |g(x) - f(x)|$, de modo que:

$$\limsup_{r\to 0} |⨍_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m - f(x)| \leq H(f - g)(x) + 0 + |g(x) - f(x)|$$

e daí se conclui que $E_\alpha \subset \{H(f - g) > \frac{\alpha}{2}\} \cup \{|g - f| > \frac{\alpha}{2}\}$. Portanto, pela desigualdade maximal de Hardy-Littlewood:

$$m(E_\alpha) \leq m\big(\{H(f - g) > \frac{\alpha}{2}\}\big) + m\big(\{|g - f| > \frac{\alpha}{2}\}\big) \leq \frac{2C}{\alpha}\,\epsilon + \frac{2}{\alpha}\,\epsilon$$

o que implica, pela arbitrariedade do ϵ tomado, $m(E_\alpha) = 0$, como afirmado.

□