

I) Medidas com Sinal (continuação).

I.1) Propriedades da Derivada de Radon-Nikodym

PROPOSIÇÃO 1 (regra da soma). Sejam μ medida positiva, ν_1 e ν_2 medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$, todas σ -finitas. Se $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, e se $\nu_1 + \nu_2$ estiver definida, então $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ e $\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$ μ -quase sempre.

Demonstração. A primeira afirmação é imediata; quanto à segunda, basta observar que, $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E \frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} d\mu = (\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) = \int_E \frac{d\nu_1}{d\mu} d\mu + \int_E \frac{d\nu_2}{d\mu} d\mu = \int_E \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} d\mu,$$

e a tese segue da unicidade da derivada de Radon-Nikodym. $\square$

PROPOSIÇÃO 2 (regra da cadeia). Sejam μ, λ medidas positivas, ν medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$, todas σ -finitas. Suponha $\nu \ll \mu \ll \lambda$. Então:

i) $\forall g \in L^+, \int g d\mu = \int g \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$. Consequentemente, $\forall g : X \rightarrow \mathbb{C}$:

1) $g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow g \frac{d\mu}{d\lambda} \in L^1(\lambda)$ e, caso afirmativo, vale a mesma igualdade entre as integrais.

2) $g \in L^1(\nu) \Leftrightarrow g \frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ e, caso afirmativo, $\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$.

ii) $\nu \ll \lambda$ e $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}$ λ -quase sempre.

Demonstração. Para $g \in L^+$, a igualdade $\int g d\mu = \int g \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$ vale se g for uma função característica, pela definição da derivada de Radon-Nikodym. Por aditividade, também deve valer se g for uma função simples positiva. Finalmente, para g mensurável positiva qualquer, basta tomar uma sequência crescente de funções simples positivas $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que convirja pontualmente para g ; então $(\phi_n \frac{d\mu}{d\lambda})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em L^+ e $\phi_n \frac{d\mu}{d\lambda} \rightarrow g \frac{d\mu}{d\lambda}$, de modo que, pelo teorema da convergência monótona:

$$\int g d\mu = \lim \int \phi_n d\mu = \lim \int \phi_n \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \int g \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

Isso prova a afirmação i). A afirmação i.1) é um corolário, aplicando-se a igualdade acima para as funções positivas $(\operatorname{Re} g)^\pm$ e $(\operatorname{Im} g)^\pm$. A afirmação i.2), por sua vez, é corolário de i.1) aplicado a $\nu^+ \ll \mu$ e $\nu^- \ll \mu$, lembrando que $L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$ e, $\forall g \in L^1(\nu)$, $\int g d\nu = \int g d\nu^+ - \int g d\nu^-$.

Quanto à afirmação ii), é claro que $\nu \ll \lambda$; e, para todo $E \in \mathcal{M}$, segue de i) que $\int_E d\nu^+ = \int_E \frac{d\nu^+}{d\mu} d\mu = \int_E \frac{d\nu^+}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$, de modo que, pela unicidade da derivada de Radon-Nikodym, $\frac{d\nu^+}{d\lambda} = \frac{d\nu^+}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}$ λ -quase sempre. Afirmação análoga vale para ν^- e, como $\nu = \nu^+ - \nu^-$, obtém-se a tese com uma aplicação da regra da soma. $\square$

COROLÁRIO 1. Sejam μ, λ medidas positivas e σ -finitas em $(X, \mathcal{M})$, tais que $\mu \ll \lambda$ e $\lambda \ll \mu$. Então $\frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = 1$ quase sempre (com respeito a λ ou μ).

Demonstração. Aplique o corolário anterior com $\mu \ll \lambda \ll \mu$, notando que $\frac{d\mu}{d\mu} = 1$. $\square$

I.2) Medidas Complexas

DEFINIÇÃO 1 (medidas complexas). Uma *medida complexa* μ num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

mc.i) $\mu(\emptyset) = 0$.

mc.ii) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, com o significado de que, no segundo membro, a série é absolutamente convergente (i.e. a integral com respeito à medida de contagem existe) e sua soma é igual ao primeiro membro.

EXEMPLO 1: Se μ for uma medida positiva em $\mathcal{M}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ for μ -integrável, $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $E \mapsto \int_E f d\mu$ é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. NOTAÇÃO: $\nu = f d\mu$.

OBSERVAÇÃO. É imediato verificar que, se μ for uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$, $\mu_r \doteq \operatorname{Re} \mu$ e $\mu_i \doteq \operatorname{Im} \mu$ são medidas com sinal finitas em $(X, \mathcal{M})$, o que nos permite generalizar para medidas complexas a teoria desenvolvida nas seções anteriores, conforme descrito nos teoremas abaixo.

DEFINIÇÃO 2. Sejam ν, λ medidas complexas e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Diz-se que:

- i) ν e λ são mutuamente singulares (NOTAÇÃO: $\nu \perp \lambda$) se $\nu_a \perp \lambda_b$ para $a, b = r, i$.
- ii) ν é absolutamente contínua com respeito a μ (NOTAÇÃO: $\nu \ll \mu$) se $\nu_a \ll \mu$ para $a = r, i$.

DEFINIÇÃO 3. Seja ν medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. $L^1(\nu) \doteq L^1(\nu_r) \cap L^1(\nu_i)$. Se $f \in L^1(\nu)$,

$$\int f d\nu \doteq \int f d\nu_r + i \int f d\nu_i.$$

TEOREMA 1. Sejam ν medida complexa e μ medida positiva σ -finita em $(X, \mathcal{M})$.

1. (TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE LEBESGUE) Existem únicas medidas complexas ν_a e ν_s em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu = \nu_a + \nu_s$.
2. (TEOREMA DE RADON-NIKODYM) Se $\nu \ll \mu$, existe $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -integrável tal que $\nu = f d\mu$. Tal função é única, no sentido de que, se g for outra função com a mesma propriedade, então $g = f$ quase sempre com respeito a μ .

DEFINIÇÃO 4. Com a notação do teorema acima:

1. ν_a e ν_s chamam-se, respectivamente, *parte absolutamente contínua* e *parte singular* de ν com respeito a μ .
2. f chama-se *derivada de Radon-Nikodym* de ν com respeito a μ e denota-se por $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Demonstração. Basta aplicar a versão do teorema para medidas com sinal aos pares $(\operatorname{Re} \nu, \mu)$ e $(\operatorname{Im} \nu, \mu)$. Ponha $\nu_s \doteq (\operatorname{Re} \nu)_s + i(\operatorname{Im} \nu)_s$ e $\nu_a \doteq (\operatorname{Re} \nu)_a + i(\operatorname{Im} \nu)_a$, e $\frac{d\nu}{d\mu} \doteq \frac{d\operatorname{Re} \nu}{d\mu} + i \frac{d\operatorname{Im} \nu}{d\mu}$. Isso prova a existência, e a unicidade decorre da unicidade das partes reais e imaginárias enunciada na versão do teorema para medidas com sinal. $\square$

Exercício:

Com a notação da definição e teorema acima, enuncie e verifique generalizações das regras da soma e da cadeia para a derivada de Radon-Nikodym, c.f. proposições 1 e 2.

1.2.1 Variação total de uma medida complexa

Seja ν medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. Tome μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$ tal que $\nu \ll \mu$ (existe; por exemplo, $\mu = |\operatorname{Re} \nu| + |\operatorname{Im} \nu|$). Pelo teorema de Radon-Nikodym, $\nu = f d\mu$, onde $f \in L^1(\mu)$ é a derivada de Radon-Nikodym de ν com respeito a μ . Definimos:

$$|\nu| \doteq |f| d\mu.$$

Verifiquemos que isto é uma boa definição, i.e. não depende da medida positiva μ tomada. Com efeito, suponha que μ' seja outra medida positiva em $(X, \mathcal{M})$ tal que $\nu \ll \mu'$, de modo que $\nu = f' d\mu'$. Seja $\lambda \doteq \mu + \mu'$, de modo que $\mu \ll \lambda$ e $\mu' \ll \lambda$. Segue da regra da cadeia que $\nu \ll \lambda$ e:

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = f \frac{d\mu}{d\lambda} = f' \frac{d\mu'}{d\lambda}$$

λ -quase sempre, de modo que $|f| \frac{d\mu}{d\lambda} = |f'| \frac{d\mu'}{d\lambda}$ λ -quase sempre. Portanto, novamente pela regra da cadeia:

$$|f| d\mu = |f| \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = |f'| \frac{d\mu'}{d\lambda} d\lambda = |f'| d\mu'$$

o que prova a afirmação de que $|\nu|$ está bem definida.

DEFINIÇÃO 5 (variação total). Com a notação acima, a medida positiva $|\nu|$ chama-se *variação total* de ν .

OBSERVAÇÃO. Se ν for uma medida com sinal finita, a definição acima coincide com a definição prévia de variação total, i.e. $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. Com efeito, se (P, N) for uma decomposição de Hahn para ν , já vimos que $\nu = (\chi_P - \chi_N) d(\nu^+ + \nu^-)$, e basta observar que $|\chi_P - \chi_N| = 1$.

PROPOSIÇÃO 3 (propriedades da variação total). Seja ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$.

a) $\forall E \in \mathcal{M}, |\nu(E)| \leq |\nu|(E)$.

b) $\nu \ll |\nu|$ e $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ tem valor absoluto 1 quase sempre com respeito a $|\nu|$.

c) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ e, para toda $f \in L^1(\nu)$, $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$.

d) Se λ for outra medida complexa em $(X, \mathcal{M})$, então $|\nu + \lambda| \leq |\nu| + |\lambda|$.