# MAT 5798 – Medida e Integração
# IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798`

`Notas da Aula 16 (10/6)`

`I) Medidas com Sinal (continuação).` Como consequência do teorema de decomposição de Hahn, que fornece uma decomposição do "espaço", obteremos, a seguir uma decomposição para a medida com sinal $\nu$.

Definição 1 (medidas mutuamente singulares). Sejam $\nu, \lambda$ medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

- Diz-se que $\nu$ é *concentrada* em $N \in \mathcal{M}$ se $N^c$ for nulo para $\nu$, i.e. se $(\forall A \in \mathcal{M})\ \nu(A) = \nu(A \cap N)$.
- Diz-se que $\nu$ e $\lambda$ são *mutuamente singulares* (notação: $\nu \perp \lambda$) se existirem $N, L \in \mathcal{M}$ tais que $N \cup L = X$, $N \cap L = \emptyset$, $\nu$ concentrada em $N$ e $\lambda$ concentrada em $L$.

Teorema 1 (teorema de decomposição de Jordan). Seja $\nu$ uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Então existem únicas medidas positivas $\nu^+$, $\nu^-$ tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$.

*Demonstração.* 1) existência: tome $(P, N)$ decomposição de Hahn para $\nu$, $\nu^+ \doteq \nu \llcorner P : E \in \mathcal{M} \mapsto \nu(E \cap P)$ e $\nu^- \doteq -\nu \llcorner N$.

2) unicidade: suponha $\mu^+, \mu^-$ medidas positivas tais que $\nu = \mu^+ - \mu^-$ e $\mu^+ \perp \mu^-$. Tome $P', N' \in \mathcal{M}$ disjuntos e tais que $X = P' \cup N'$, $P'$ nulo para $\mu^-$ e $N'$ nulo para $\mu^+$. Sejam $\nu^\pm$ e $(P, N)$ como no item anterior. Então $(P, N)$ e $(P', N')$ são ambas decomposições de Hahn para $\nu$, de modo que, pela unicidade enunciada no teorema de decomposição de Hahn, $P \Delta P'$ e $N \Delta N'$ são $\nu$-nulos. Então, para todo $E \in \mathcal{M}$, tem-se:

$$\mu^+(E) = \mu^+(E \cap P') = \nu(E \cap P') = \nu(E \cap P) = \nu^+(E).$$

Analogamente, $\mu^-(E) = \nu^-(E)$, logo $\mu^+ = \nu^+$ e $\mu^- = \nu^-$.

□

Definição 2 (variações positiva, negativa e total de uma medida com sinal). Com a notação do teorema acima, o par $(\nu^+, \nu^-)$ chama-se *decomposição de Jordan* para $\nu$. A medida positiva $\nu^+$ chama-se *variação positiva* e a medida $\nu^-$ chama-se *variação negativa* de $\nu$. A medida positiva $|\nu| \doteq \nu^+ + \nu^-$ chama-se $\nu^+$ *variação total* de $\nu$.

Observação.

1. A nomenclatura acima segue a mesma nomenclatura usada para a decomposição de uma função de variação limitada nas suas variações positiva, negativa e total, conforme será visto mais adiante; e, conforme também será visto, estas decomposições para medidas e para funções estão relacionadas entre si.
2. Note que, se $\infty \notin \operatorname{Im} \nu$, $\nu^+(X) = \nu(P) < \infty$, de modo que $\nu^+$ é uma medida finita. Analogamente, se $-\infty \notin \operatorname{Im} \nu$, $\nu^-$ é uma medida finita. Em particular, se $\operatorname{Im} \nu \subset \mathbb{R}$, então $\operatorname{Im} \nu$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Definição 3. Seja $\nu$ medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

i) $\mathsf{L}^1(\nu) \doteq \mathsf{L}^1(\nu^+) \cap \mathsf{L}^1(\nu^-)$. Para $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$, $\int f \, d\nu \doteq \int f \, d\nu^+ - \int f \, d\nu^-$.

ii) $\nu$ diz-se *σ-finita* se $\nu^+$ e $\nu^-$ o forem (*see* $|\nu|$ o for).

**Exercício:**
Seja $\nu$ medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Então:

a) $\forall E \in \mathcal{M}$, $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$.

b) $\mathsf{L}^1(\nu) = \mathsf{L}^1(|\nu|)$ e, para toda $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$, $|\int f \, d\nu| \leq \int |f| \, d|\nu|$.

c) $\nu = f \, d|\nu|$, onde $f = \chi_P - \chi_N$ e $(P, N)$ decomposição de Hahn para $\nu$.

`I.1) O teorema de Radon-Nikodym.`

Definição 4. Sejam $\nu$ medida com sinal e $\mu$ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Diz-se que $\nu$ é *absolutamente contínua* com respeito a $\mu$ (notação: $\nu \ll \mu$) se $\forall E \in \mathcal{M}$, $\nu(E) = 0$ sempre que $\mu(E) = 0$.

No caso em que $\nu$ é finita, a condição acima corresponde, de fato, a uma ideia de "continuidade", no sentido da proposição abaixo:

Proposição 1. Sejam $\nu$ medida com sinal finita e $\mu$ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Então $\nu \ll \mu$ ***see*** $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$, então $|\nu(E)| < \epsilon$.

*Demonstração.* $(\Leftarrow)$ é imediata.

$(\Rightarrow)$ Redução: basta provar o caso em que $\nu$ é positiva. A redução decorre de: (i) $(\forall E \in \mathcal{M})|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ e (ii) $\nu \ll \mu$ ***see*** $|\nu| \ll \mu$ (verifique).

Seja, pois, $\nu$ medida positiva finita tal que $\nu \ll \mu$. Suponha, por contradição, que exista $\epsilon > 0$ tal que, $\forall \delta > 0$, $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \delta$ e $\nu(E) \geq \epsilon$. Pondo $\delta = 2^{-n}$, obtém-se uma sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\nu(E_n) \geq \epsilon$. Tome $E \doteq \limsup E_n = \cap_{n \in \mathbb{N}} \cup_{k \geq n} E_k \in \mathcal{M}$. Então $\mu(E) = 0$ (pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(\cup_{k \geq n} E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq 2^{-k+1}$), mas $\nu(E) \geq \epsilon$ (pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\nu(\cup_{k \geq n} E_k) \geq \epsilon$, donde, pela continuidade para baixo, $\nu(\cap_{n \in \mathbb{N}} \cup_{k \geq n} E_k) = \lim_{n \to \infty} \nu(\cup_{k \geq n} E_k) \geq \epsilon$). Isso contradiz $\nu \ll \mu$, donde a tese. $\square$

Corolário 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$, então $|\int_E f \, \mathrm{d}\mu| < \epsilon$.

*Demonstração.* Basta observar que $\nu \doteq |f| \, \mathrm{d}\mu$ é uma medida positiva finita e $\nu \ll \mu$; aplique a proposição anterior e a desigualdade triangular. $\square$

Observação. Alguma motivação para o teorema de Radon-Nikodym:

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathsf{C}^1$ e crescente. Pelo que vimos na primeira parte do curso, $f$ induz uma medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_f : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$. Note que, $\forall a < b \in \mathbb{R}$:

$$\mu_f\big((a, b]\big) = f(b) - f(a) \overset{TFC}{=} \int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{(a,b]} f' \, \mathrm{d}m,$$

   de modo que as medidas $\mu_f$ e $f' \, \mathrm{d}m$ coincidem em todo h-intervalo limitado. Isso implica, conforme já vimos quando da discussão das medidas de Lebesgue-Stieltjes, $\mu_f = f' \, \mathrm{d}m$. Se $\mu_f$ for uma medida de probabilidade, $f'$ chama-se *densidade de probabilidade* da medida de probabilidade em questão.

2. Tendo em vista o que foi exposto no item anterior, gostaríamos de investigar condições sob as quais uma medida boreliana na reta é da forma $f \, \mathrm{d}m$, com $f$ boreliana positiva. Ou, num contexto mais abstrato, dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, gostaríamos de caracterizar as medidas em $\mathcal{M}$ da forma $f \, \mathrm{d}\mu$, com $f \in \mathsf{L}^+$. É claro que, se uma medida $\nu$ for dessa forma, então $\nu \ll \mu$. No caso em que $\mu$ é $\sigma$-finita, vale a recíproca; este é o conteúdo do teorema de Radon-Nikodym, abaixo.