MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 14 (6/5)`

I) A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

Definição 1. O espaço de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ é, por definição, o completamento de $(\mathbb{R}^n, \otimes_1^n \mathcal{L}, \prod_1^n m)$.

1. Notação: Omitimos o "n" da notação sempre que não causar confusão.
2. Também chamamos de "medida de Lebesgue" a restrição de m^n a $\otimes_1^n \mathcal{L}$ ou a $\otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Proposição 1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ é o completamento de $(\mathbb{R}^n, \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \Pi_1^n m)$.

Proposição 2. Seja $\rho : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ onde $\mathcal{R} \doteq \{\Pi_{i=1}^n I_i : \forall i, I_i \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto$\}$ e $\rho(\Pi_{i=1}^n I_i) = \Pi_{i=1}^n m(I_i)$. Considere ρ como pré-medida exterior e seja m^* a medida exterior induzida. Então $\mathcal{L}^n = \sigma(m^*)$ e $m^n = m^*|_{\mathcal{L}^n}$.

- Valem para m^n as mesmas propriedades de regularidade e densidade vistas para m. Por exemplo:

Proposição 3. $\forall E \in \mathcal{L}^n$:

(a) $m^n(E) = \inf\{m^n(U) : U \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n \text{ e } U \supset E\} = \sup\{m^n(K) : K \subset E \text{ compacto}\}$.

(b) $\exists F \in F_\sigma$, $\exists G \in G_\delta$, $\exists N_1, N_2 \subset \mathbb{R}^n$ nulos tais que

$$E = F \cup N_1 = G \backslash N_2.$$

Proposição 4. As funções contínuas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ com suporte compacto formam um subespaço denso de $L^1(m^n)$.

Teorema 1 (invariância por translações de m^n). Dado $a \in \mathbb{R}^n$, defina $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $x \mapsto x + a$.

(a) Para todo $E \in \mathcal{L}^m$, $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ e $m^n(\tau_a(E)) = m^n(E)$.

(b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ é $\mathcal{L}^n$-mensurável, com $f \geq 0$ ou $f \in \mathcal{L}^1$, $f \circ \tau_a$ também o é e $\int f dm^n = \int f \circ \tau_a dm^n$.

- Prova:
  1. Basta provar o caso $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e f boreliana; o caso geral se obtém com o mesmo argumento usado com $n = 1$ (vide notas da aula 6).
  2. Para provar o caso $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e f borelianos, basta verificar (b), pois (a) é caso particular de (b) com funções características no lugar de f. E, como τ_a é homeomorfismo, é claro que $f \circ \tau_a$ é boreliana; só resta verificar a invariância da integral.
  3. Para simplificar a notação, assumimos $n = 2$. Nesse caso, notando que $m^2|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = m \times m$, e que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ é σ-finito, se $f \geq 0$ podemos aplicar Tonelli para concluir que (pondo $a = (a_1, a_2)$):

$$\begin{aligned}
\int f \circ \tau_a d(m \times m) &= \int f(x_1 + a_1, x_2 + a_2) d(m \times m)(x_1, x_2) \\
&\overset{(*)}{=} \int \int f(x_1 + a_1, x_2 + a_2) dm(x_1) dm(x_2) \\
&\overset{(**)}{=} \int \int f(x_1, x_2 + a_2) dm(x_1) dm(x_2) \\
&\overset{(*)}{=} \int \int f(x_1, x_2 + a_2) dm(x_2) dm(x_1) \\
&\overset{(**)}{=} \int \int f(x_1, x_2) dm(x_2) dm(x_1) \\
&\overset{(*)}{=} \int f d(m \times m)
\end{aligned}$$

$(*)$: Tonelli.
$(**)$: invariância de m por translações.
Se $f \in \mathsf{L}^1$, segue do caso acima aplicado a $|f|$ que $|f| \circ \tau_a = |f \circ \tau_a| \in \mathsf{L}^1$; então podemos refazer as mesmas integrais iteradas acima, usando-se Fubini no lugar de Tonelli, para concluir a desejada invariância da integral.

```
I.1)  Teorema de Mudança de Variáveis
```

DEFINIÇÃO 2. $Gl(n,\mathbb{R}) \doteq \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ linear inversível}\} \subset L(\mathbb{R}^n)$

- Dada $T \in L(\mathbb{R}^n)$, denotaremos por $[T_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ a sua matriz na base canônica $\varepsilon = (e_1, \cdots, e_n)$:

$$T \cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ij} e_i$$

PROPOSIÇÃO 5 (mudança linear de variáveis). Seja $T \in Gl(n,\mathbb{R})$.

(i) $\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ Lebesgue-mensurável, $f \circ T$ também o é.

(ii) Em (i), se $f \geq 0$ ou $f \in L^1$,

$$\int f dm = \int f \circ T \, |\det T| dm.$$

(iii) $\forall E \in \mathcal{L}^n$, $T(E) \in \mathcal{L}^n$ e $m(T(E)) = |\det T| \cdot m(E)$.

- Prova:

1. Redução: basta mostrar o caso em que f e E são borelianos; o caso geral seguirá pelo mesmo argumento que já usamos anteriormente para demonstrar a invariância por translações e homogeneidade com respeito a homotetias da medida de Lebesgue unidimensional (vide notas da aula 6).
2. Seja, pois, f boreliana. Nesse caso, como T é contínua, $f \circ T$ é boreliana.
3. Conforme se prova nos cursos elementares de Álgebra Linear, toda matriz inversível pode ser transformada na matriz identidade através de uma sequência finita de "operações elementares nas linhas". Equivalentemente, toda $T \in Gl(n,\mathbb{R})$ é composição de um número finito de elementos de $Gl(n,\mathbb{R})$ de uma das formas abaixo:

   Tipo 1: $T_1(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, cx_j, \cdots, x_n)$, $c \neq 0$ (multiplicar uma linha por um escalar não nulo).

   Tipo 2: $T_2(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_j + bx_k, \cdots, x_n)$, $k \neq j$ (multiplicar uma linha por um escalar e somá-la noutra).

   Tipo 3: $T_3(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_k, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$ (trocar duas linhas).
4. Seja $G = \{T \in Gl(n,\mathbb{R}) | \forall f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty] \text{ boreliana}, \int f dm = \int f \circ T \cdot |\det T| dm\}$. Afirmo que G é um subgrupo de $Gl(n,\mathbb{R})$. Com efeito:

   (a) Se S e T estiverem em G, tem-se, $\forall f \geq 0$ boreliana:

   $$\int f dm \overset{T\in G}{=} \int \underbrace{f \circ T \cdot |\det T|}_{\geq 0} dm \overset{S\in G}{=} \int \underbrace{f \circ T \circ S}_{f\circ(T\circ S)} \underbrace{|\det T||\det S|}_{|\det(T\circ S)|} dm$$

   $\therefore T \circ S \in G$.

   (b) Se $T \in G$, tome $f \geq 0$ boreliana. Então $f \circ T^{-1} \geq 0$ boreliana, daí:

   $$\int f \circ T^{-1} dm \overset{T\in G}{=} \int f \circ T^{-1} \circ T \cdot |\det T| dm = |\det T| \int f dm \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \int f dm = |\det T^{-1}| \int f \circ T^{-1} dm = \int f \circ T^{-1} \cdot |\det T^{-1}| dm$$

   $\therefore T^{-1} \in G$.

   De a) e b), G é um subgrupo de $Gl(n,\mathbb{R})$, como afirmado.
5. Como as transformações dos tipos 1, 2 e 3 geram $Gl(n,\mathbb{R})$, se provarmos que T_1, T_2, T_3 como acima estão em G, segue $G = Gl(n,\mathbb{R})$.

   - Para T_1: $\forall f \geq 0$ boreliana:

   $$\int f \circ T_1 \cdot \underbrace{|\det T_1|}_{=|c|} dm = |c| \int f(x_1, \cdots, cx_j, \cdots, x_n) dm$$
   $$\overset{\text{Tonelli}}{=} |c| \int f(x_1, \cdots, cx_j, \cdots, x_n) dm(x_j) dm(x_1) \cdots \widehat{dm(x_j)} \cdots dm(x_n) \qquad (**)$$

   (Notação: $\widehat{}$ significa que estou omitindo da sequência.)

$*$ Recorde (cf. notas da aula 6): Se $E \in \mathcal{L}^1$ e $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $cE \in \mathcal{L}^1$ e $m(cE) = |c| \cdot m(E)$, i.e.

$$\int \underbrace{\chi_{cE}}_{=\chi_E \circ \mu_{c^{-1}}} dm = |c| \int \chi_E dm,$$

onde $\mu_r : x \mapsto rx$ denota a homotetia de razão r. Daí, $\forall f \geq 0$ simples, segue da aditividade da integral que:

$$\int f \circ \mu_{c^{-1}} = |c| \int f dm \Leftrightarrow \int f \circ \mu_{c^{-1}} |c^{-1}| dm = \int f dm.$$

Assim sendo, $\forall f \geq 0$ boreliana, tomando-se $(\phi_n)_n$ sequência de funções simples pontualmente convergente para f, conclui-se pelo teorema da convergência monótona que, $\forall c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\int f \circ \mu_c |c| dm \overset{(*)}{=} \int f dm.$$

Voltemos:

$$(**) \overset{\text{por } (*)}{=} \int f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) dm(x_j) dm(x_1) \cdots \widehat{dm(x_j)} \cdots dm(x_n) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int f dm,$$

logo $T_1 \in G$.

- Para T_2, com $n = 2$ (para simplificar a notação):

$$\int f \circ T_2 \cdot \underbrace{|\det T_2|}_{=1} dm = \int f(x_1 + bx_2, x_2) dm^2(x_1, x_2) =$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int f(x_1 + bx_2, x_2) dm(x_1) dm(x_2) =$$

$$\overset{m^1 \text{ invariante por translações}}{=} \int f(x_1, x_2) dm(x_1) dm(x_2) =$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int f dm$$

$\therefore T_2 \in G$.

- Para T_3 e $f \geq 0$ boreliana:

$$\int f \circ T_3 \underbrace{|\det T_3|}_{=1} dm = \int f(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_j, \cdots, x_n) dm^n(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_k, \cdots, x_n) =$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int f(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_j, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_j \cdots dx_k \cdots dx_n =$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int f(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_j, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_k \cdots dx_j \cdots dx_n =$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int f dm.$$

$\therefore T_3 \in G$.

Conclusão: $\forall f \geq 0$ boreliana, $\forall T \in Gl(n, \mathbb{R})$,

$$\int f dm \overset{(\blacktriangle)}{=} \int f \circ T \cdot |\det T| dm.$$

6. Se $f \in L^1(m^n)$, aplicamos a fórmula acima para $(\text{Re} f)^{\pm}$, $(\text{Im} f)^{\pm}$. Conclui-se que $(\blacktriangle)$ também vale para f.
7. Finalmente, dado $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $T(E) = (T^{-1})^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e

$$m(T(E)) = \int \underbrace{\chi_{T(E)}}_{=\chi_E \circ T^{-1}} dm \overset{(\blacktriangle)}{=} \int \chi_E \circ T^{-1} \circ T \cdot |\det T| dm = |\det T| \int \chi_E dm = |\det T| m(E),$$

o que conclui a prova do caso f e E borelianos, ao qual havíamos reduzido o caso geral.

Definição 3. Uma aplicação $\phi : \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se um difeomorfismo C^1 se for uma aplicação de classe C^1, injetiva, com $(\forall x \in \mathcal{U})\ D\phi(x) \in Gl(n, \mathbb{R})$.

Observação. Pelo teorema da função inversa, a condição acima é equivalente a: $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\phi : \mathcal{U} \to \phi(\mathcal{U})$ é de classe C^1, inversível, com $\phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ de classe C^1.

Teorema 2 (de mudança de variáveis). Sejam $\Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo C^1. Tem-se:

(i) $\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ Lebesgue-mensurável, $f \circ \phi$ também o é.

(ii) Se, em (i), $f \geq 0$ ou $f \in L^1$,

$$\int_{\phi(\Omega)} f dm = \int_\Omega f \circ \phi(x) \cdot |\det D\phi(x)| dm(x).$$

(iii) Se $E \subset \Omega$ for Lebesgue-mensurável, $\phi(E)$ também o é e

$$m(\phi(E)) = \int_E |\det D\phi(x)| dm(x).$$

- Prova:
  1. Redução: basta considerar o caso em que f é boreliana ($\therefore f \circ \phi$ também o é) e provar (ii), pois (iii) é caso particular de (ii).
  2. Preliminares:

     2.1) Em $\mathbb{R}^n$, usemos a norma $\|\cdot\|$ dada por (sendo $x = (x_1, \cdots, x_n)$ na base canônica):

     $$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

     Nessa norma, dado $r > 0$, a bola fechada $B_r[x] = \prod_{i=1}^n [x_i - r, x_i + r]$ é um *cubo* (i.e. um produto de intervalos compactos de mesmo comprimento) de lado $2r$.

     2.2) Seja $T \in L(\mathbb{R}^n)$.

     - Note que, $\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sendo $[T] = [T_{ij}]$ na base canônica,

     $$\|T \cdot x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n T_{ij} x_j \right|}_{\overset{\text{des } \triangle}{\leq} \underbrace{\sum_{j=1}^n |T_{ij}||x_j|}_{\leq \left(\sum_{j=1}^n |T_{ij}|\right) \|x\|}} \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |T_{ij}| \right) \|x\|$$

     - Defina:

     $$\|T\| \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |T_{ij}|.$$

     Isso define uma norma em $L(\mathbb{R}^n)$ (que é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita, portanto todas as suas normas são equivalentes) para a qual, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|T \cdot x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

     2.3) Seja Q um cubo contido em $\Omega = \operatorname{dom} \phi$. Sendo $\phi_1, \cdots, \phi_n$ as componentes de ϕ, $\forall x, y \in Q$ tais que $x \neq y$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, pelo teorema do valor médio $\exists \xi_i \in]x, y[$ (onde $]x, y[$ denota o segmento aberto com extremos x e y) tal que:

     $$\phi_i(x) - \phi_i(y) = D\phi_i(\xi_i) \cdot (x - y) = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i(\xi_i)}{\partial x_j} \cdot (x_j - y_j).$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
|\phi_i(x)-\phi_i(y)| &\overset{\text{des }\triangle}{\leq} \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\phi_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right||x_j-y_j| \leq \\
&\leq \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\phi_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right|\right]}\qquad \cdot\|x-y\| \leq \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\phi_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right| = \|D\phi(\xi_i)\| \\
&\leq \sup\{\|D\phi(\xi)\| : \xi\in Q\}\cdot\|x-y\|.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\|\phi(x)-\phi(y)\| = \max_{1\leq i\leq n}|\phi_i(x)-\phi_x(y)| \leq \sup\{\|D\phi(\xi)\| : \xi\in Q\}\cdot\|x-y\|.
$$

Note que $\alpha \doteq \sup\{\|D\phi(\xi)\| : \xi\in Q\} < \infty$, pois $D\phi$ é contínua e Q é compacto.

2.4) COROLÁRIO: $m(\phi(Q)) \leq [\sup\|D\phi(\xi)\| : \xi\in Q\}]^n\cdot m(Q)$

- $*$ Prova: Segue de 2.3) que $\phi(Q)$ está contido num cubo de lado $\alpha\cdot$ (lado de Q). Como:

$$
\begin{aligned}
\lambda_\alpha : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\
x &\mapsto \alpha x
\end{aligned}
$$

é tal que $\det\lambda_\alpha = \alpha^n$, segue da proposição 5, $m(\lambda_\alpha Q) = |\det\lambda_\alpha|\cdot m(Q) = \alpha^n m(Q)$,

$$
\therefore\ m(\phi(Q)) \overset{\text{monotonicidade}}{\leq} m(\text{cubo de lado } \alpha\cdot\ell(Q)) \overset{\text{inv. por trans.}}{=} m(\lambda_\alpha Q) = \alpha^n m(Q).
$$

2.5) Todo aberto $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como reunião enumerável de cubos com interiores disjuntos.

- $*$ Prova: Para cada $k\in\mathbb{N}$, defina

$$
\mathbb{Q}_k \doteq \{Q\subset\mathbb{R}^n | Q \text{ cubo de lado } 2^{-k} \text{ com vértices em } (2^{-k}\cdot\mathbb{Z})^n\}
$$

(i.e. $Q\in\mathbb{Q}_k$ see Q for da forma $\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]$ com $(\forall i)$ $a_i\in 2^{-k}\cdot\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2^k a_i\in\mathbb{Z}$ e $b_i-a_i=2^{-k}$). Dado $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ aberto, defina:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{U}_0 \doteq \{Q\in\mathbb{Q}_0 | Q\subset\mathcal{U}\} \\
&\mathcal{U}_1 \doteq \{Q\in\mathbb{Q}_1 | Q\subset\mathcal{U} \text{ e } \nexists\overline{Q}\in\mathcal{U}_0 \text{ com } Q\subset\overline{Q}\} \\
&\mathcal{U}_2 \doteq \{Q\in\mathbb{Q}_2 | Q\subset\mathcal{U} \text{ e } \nexists\overline{Q}\in\cup_{i=0}^{1}\mathcal{U}_i \text{ com } Q\subset\overline{Q}\} \\
&\vdots \\
&\mathcal{U}_n \doteq \{Q\in\mathbb{Q}_n | Q\subset\mathcal{U} \text{ e } \nexists\overline{Q}\in\cup_{i=0}^{n-1}\mathcal{U}_i \text{ com } Q\subset\overline{Q}\}
\end{aligned}
$$

Verifique que $\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_i$ é uma coleção enumerável de cubos com interiores disjuntos tal que $\cup[\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_i] = \mathcal{U}$.

3. Seja $Q\subset\Omega$ cubo.

3.1) Afirmação: $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $\forall x,y\in Q$ com $\|x-y\|<\delta$, tem-se

$$
\|D\phi(y)^{-1}\circ D\phi(x)\|^n < 1+\epsilon. \tag{1}
$$

- $*$ Prova:

$$
\begin{aligned}
Q\times Q &\xrightarrow{\psi} \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto \|D\phi(y)^{-1}\circ D\phi(x)\|^n
\end{aligned}
$$

é contínua, pois é a composta das flexas abaixo, as quais são todas contínuas:

$$
\begin{array}{l}
Q\times Q \to Gl(n,\mathbb{R})\times Gl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{I\times\text{id}} Gl(n,\mathbb{R})\times Gl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\circ} Gl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{i} L(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\|\cdot\|^n} \mathbb{R} \\
(x,y) \mapsto (D\phi(y), D\phi(x)) \\
\qquad\qquad (A,B) \longmapsto (A^{-1},B) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (T,S) \longmapsto (T\circ S)
\end{array}
$$

Então, como $Q \times Q$ é compacto, ψ é unformemente contínua, i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, se $(x, y), (x', y') \in Q \times Q$ e $\|(x, y) - (x', y')\| < \delta$ (norma do máximo), $|\psi(x, y) - \psi(x', y')| < \epsilon$. Em particular, se $(x, y) \in Q$ e $\|x - y\| < \delta$, então $\|(x, y) - (x, x)\| < \delta$, logo:

$$\begin{aligned}\psi(x,y) - 1 \leq |\psi(x,y) - &\underbrace{\psi(x,x)}_{=1}| < \epsilon \\ \therefore \qquad \underbrace{\psi(x,y)}_{= \|D\phi(y)^{-1} \circ D\phi(x)\|^n} &\qquad < 1 + \epsilon,\end{aligned}$$

como afirmado.

3.2) Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ como em 3.1) e particione os lados de Q em subintervalos de comprimento $< \delta$, o que permite escrever Q como reunião finita de cubos com interiores disjuntos de lados menores que δ, digamos $Q = \cup_{i=1}^N Q_i^\epsilon$. Note que, para quaisquer $x, y \in Q_i^\epsilon$, $1 \leq i \leq N$, $\|x - y\| < \delta$ $\therefore$ vale (1).
Para $1 \leq i \leq N$, seja x_i o centro de Q_i^ϵ. Tem-se, $\forall T \in Gl(n, \mathbb{R})$:

$$m(\phi(Q_i^\epsilon)) = m(T \circ [T^{-1} \circ \phi(Q_i^\epsilon)]) = |\det T| \cdot m(T^{-1} \circ \phi(Q_i^\epsilon))$$

Recorde de 2.4) que $\forall Q \subset \Omega$ cubo, $m(\phi(Q)) \leq [\sup\{\|D\phi(\xi)\| : \xi \in Q\}]^n \cdot m(Q)$. Daí, com $T^{-1} \circ \phi \in C^1$ no lugar de ϕ, e Q_i^ϵ no lugar de Q:

$$m(\phi(Q_i^\epsilon)) = |\det T| \cdot m(T^{-1} \circ \phi(Q_i^\epsilon)) \leq |\det T| \cdot \underbrace{[\sup\{\| \overbrace{D(T^{-1} \circ \phi)(\xi)}^{= T^{-1} \circ D\phi(\xi)} \| : \xi \in Q_i^\epsilon\}]^n}_{= \sup\{\|T^{-1} \circ D\phi(\xi)\|^n : \xi \in Q_i^\epsilon\}} m(Q_i^\epsilon)$$

Em particular, para $T = D\phi(x_i)$, obtém-se:

$$m(\phi(Q_i^\epsilon)) \leq |\det D\phi(x_i)| \cdot \underbrace{\sup\{\overbrace{\|D\phi(x_i)^{-1} \circ D\phi(\xi)\|^n}^{\overset{(1)}{<} 1+\epsilon} : \xi \in Q_i^\epsilon\}}_{\leq 1 + \epsilon} \cdot m(Q_i^\epsilon)$$

$$\therefore m(\phi(Q_i^\epsilon)) \leq (1 + \epsilon)|\det D\phi(x_i)| m(Q_i^\epsilon).$$

Daí, como $\phi(Q) = \cup_{i=1}^N \phi(Q_i^\epsilon)$, segue:

$$m(\phi(Q)) \leq \sum_{i=1}^N m(\phi(Q_i^\epsilon)) \leq (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^N |\det D\phi(x_i)| m(Q_i^\epsilon). \tag{2}$$

Tome

$$\Psi_\epsilon = \sum_{i=1}^N |\det D\phi(x_i)| \chi_{Q_i^\epsilon}$$

Ponha $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada tal $\epsilon = \frac{1}{n}$, corresponda $\delta = \delta_n > 0$ dado por 3.1) e de modo que $\delta_n \searrow 0$. Afirmo que $(\Psi_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge m-q.s. para a função

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |\det D\phi(x)| \chi_Q(x).\end{aligned}$$

Note que, para cada $\epsilon > 0$, $m(\cup_{i=1}^N \partial Q_i^\epsilon) = 0$ (i.e. cada face tem medida de Lebesgue zero). Assim,

$$m\underbrace{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{N(n)} \partial Q_i^{\frac{1}{n}}\right)}_{A} = 0.$$

$\forall x \in Q \backslash A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!\, i = i(n) \in \{1, \ldots, N(n)\}$ tal que $x \in$int $Q_i^{\frac{1}{n}}$ (i.e. x pertence ao interior de um único cubo $Q_i^{\frac{1}{n}}$ na decomposição de Q para $\epsilon = \frac{1}{n}$). Daí $\Psi_{\frac{1}{n}}(x) = |\det D\phi(x_{i(n)})|$ e, como

$x_{i(n)}, x \in Q_{i(n)}^{\frac{1}{n}}$, $\|x_{i(n)} - x\| < \delta_n$. Portanto, $x_{i(n)} \to x$, donde $D\phi(x_{i(n)}) \to D\phi(x)$ (pois $\phi \in C^1$), de modo que

$$\Psi_{\frac{1}{n}}(x) = |\det D\phi(x_{i(n)})| \to |\det D\phi(x)|\chi_Q(x).$$

Ou seja, em $Q \backslash A$, $\Psi_{1/n} \to |\det D\phi|\chi_Q$, o que prova a afirmação. Além disso, a convergência é dominada, pois, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|\Psi_{\frac{1}{n}}| \overset{m\text{-q.s.}}{\leq} \sup\{|\det D\phi(x)| : x \in Q\} \cdot \chi_Q$$

valendo a desigualdade no complementar da união das faces dos cubos $Q_i^{\frac{1}{n}}$, i.e. no complementar de A. Podemos, pois, aplicar o teorema da convergência dominada:

$$\int \Psi_{\frac{1}{n}} dm \xrightarrow{n \to \infty} \int |\det D\phi|\chi_Q dm.$$

Daí, para todo $n \in \mathbb{N}$, pela desigualdade (2) com $\epsilon = 1/n$,

$$m(\phi(Q)) \leq (1 + \frac{1}{n}) \sum_{i=1}^{N(n)} |\det D\phi(x_i)| m(Q_i^{\frac{1}{n}}) = (1 + \frac{1}{n}) \int \Psi_{\frac{1}{n}} dm \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_Q |\det D\phi| dm,$$

portanto:

$$m(\phi(Q)) \leq \int_Q |\det D\phi| dm. \tag{3}$$

4. Seja $\mathcal{U}$ aberto, $\mathcal{U} \subset \Omega$. Por 2.5), $\exists (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de cubos com interiores disjuntos tais que $\mathcal{U} = \cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$. Então, $\phi(\mathcal{U}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \phi(Q_n)$, donde

$$\begin{aligned} m(\phi(\mathcal{U})) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(\phi(Q_n)) \overset{\text{eq.(3)}}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\det D\phi(x)| dm(x) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \chi_{Q_n} |\det D\phi| dm \overset{\text{TCM}}{=} \int \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{Q_n} |\det D\phi| dm = \\ &\overset{\text{afirmação}}{=} \int \chi_{\mathcal{U}} |\det D\phi| dm = \int_{\mathcal{U}} |\det D\phi| dm. \end{aligned}$$

   – <u>Prova da afirmação</u>: Seja $(\forall n) \partial Q_n$ a fronteira topológica de Q_n. Então $m(\partial Q_n) = 0$, donde $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} \partial Q_n) = 0$. Ora, $\forall x \in \mathcal{U} \backslash \cup_{n \in \mathbb{N}} \partial Q_n$, $\exists! n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in Q_{n_0}$ (existe pois $\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n = \mathcal{U}$, e é único, pois o int $Q_n \cap$ int $Q_m = \emptyset$, se $n \neq m$), daí:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{Q_n}(x) = \chi_{Q_{n_0}}(x) = 1 = \chi_{\mathcal{U}}(x).$$

   Ou seja, $\chi_{\mathcal{U}}$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{Q_n}$ coincidem em $\mathcal{U} \backslash \cup_{n \in \mathbb{N}} \partial Q_n$ e também coincidem em $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{U}$. Logo, $\chi_{\mathcal{U}}$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{Q_n}$ coincidem em $\mathbb{R}^n \backslash \cup_{n \in \mathbb{N}} \partial Q_n$, i.e. coincidem m-quase sempre.

<u>Conclusão</u>: $\forall \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subset} \Omega$,

$$m(\phi(\mathcal{U})) \leq \int_{\mathcal{U}} |\det D\phi| dm. \tag{4}$$

5. Seja, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$W_k \doteq \{x \in \Omega | \|x\| < k \text{ e } |\det D\phi(x)| < k\}$$

de modo que $W_k \overset{\text{ab}}{\subset} \Omega$ e $\cup_{k \in \mathbb{N}} W_k = \Omega$, $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ crescente. Tome $E \subset \Omega$, $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Então:

$$E = E \cap \Omega = E \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(E \cap W_k)}_{\doteq E_k}$$

e $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é crescente.

– Afirmação: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$m(\phi(E_k)) \leq \int_{E_k} |\det D\phi| dm.$$

– Prova:

1) $\exists (\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de abertos decrescente tal que $E_k \subset \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_n$ e $m(E_k) \overset{(*)}{=} m(\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_n)$ (a existência decorre do fato de que $m(E_k) = \inf\{m(\mathcal{U}) | \mathcal{U} \supset E_k \text{ e } \mathcal{U} \text{ aberto}\}$). Substituindo, se necessário, $\mathcal{U}_n$ por $\mathcal{U}_n \cap W_k$, para cada n, podemos supor $(\forall n)$ $\mathcal{U}_n \subset W_k$.
   Note que, como $m(E_k) < \infty$ (pois $E_k \subset W_k$ e $m(W_k) < \infty$), a igualdade $(*)$ implica que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_n \backslash E_k) = 0$.
2) Decorre de 1) que, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$m(\phi(E_k)) \overset{\text{monotonicidade}}{\leq} m\left(\phi\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n\right)\right) \overset{\text{monotonicidade}}{\leq} m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \phi(\mathcal{U}_n)\right) \overset{(**)}{=} \lim m(\phi(\mathcal{U}_n)).$$

   $(**)$ vale pela continuidade para baixo da medida, tendo em vista que $\{\phi(\mathcal{U}_n)\}_n$ é decrescente e, pela desigualdade (4) ao final da parte 4:

$$m(\phi(\mathcal{U}_1)) \leq \int_{\mathcal{U}_1(\subset W_k)} \underbrace{|\det D\phi|}_{\leq k} dm \leq k m(W_k) < \infty.$$

   Por outro lado, $\forall n$, também pela desigualdade (4):

$$m(\phi(\mathcal{U}_n)) \leq \int \chi_{\mathcal{U}_n} |\det D\phi| dm$$

   e

$$\chi_{\mathcal{U}_n} |\det D\phi| \xrightarrow{p.} \chi_{\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_n} |\det D\phi| = \chi_{E_k} |\det D\phi| \text{ m-q.s.}$$

   A convergência é dominanda, pois, $(\forall n)$

$$\underbrace{\chi_{\mathcal{U}_n}}_{\leq \chi_{W_k}} \underbrace{|\det D\phi|}_{\leq k \text{ em } W_k} \leq k\chi_{W_k} \in L^1(m).$$

   Daí, pelo TCD,

$$\int \chi_{\mathcal{U}_n} |\det D\phi| \to \int \chi_{E_k} |\det D\phi|.$$

   Portanto, $\lim m(\phi(\mathcal{U}_n)) \leq \int_{E_k} |\det D\phi| dm$ e, de $(**)$, conclui-se que, $\forall k$, $m(\phi(E_k)) \leq \int_{E_k} |\det D\phi| dm$, o que conclui a prova da afirmação.

Ora, $m(\phi(E_k)) \nearrow m(\phi(E))$ (pela continuidade para cima), e:

$$m(\phi(E_k)) \leq \int \chi_{E_k} |\det D\phi| dm \xrightarrow{\text{TCM}} \int \chi_E |\det D\phi| dm.$$

Daí,

$$m(\phi(E)) \leq \int_E |\det D\phi| dm \tag{5}$$

(vale $\forall E \subset \Omega$, $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$).

6. Seja, $\psi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ simples, ≥ 0. Digamos, $\psi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}$, $E_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, na representação padrão.

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(\Omega)} \psi dm &= \int \chi_{\phi(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i} \right) dm = \\
&= \int \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i \cap \phi(\Omega)} dm = \\
&= \sum_{i=1}^k a_i m(\underbrace{E_i \cap \phi(\Omega)}_{= \phi \underbrace{(\phi^{-1}(E_i))}_{\subset \Omega \text{ e Boreliano}}}) \leq \\
&\overset{\substack{(5) \text{ com } \phi^{-1}(E_i) \\ \text{no lugar de } E}}{\leq} \sum_{i=1}^k a_i \int_{\phi^{-1}(E_i)} |\det D\phi| dm = \\
&= \int_\Omega \underbrace{\sum_{i=1}^k a_i \underbrace{\chi_{\phi^{-1}(E_i)}}_{= \chi_{E_i} \circ \phi}}_{= \psi \circ \phi} |\det D\phi| dm = \\
&= \int_\Omega \psi \circ \phi |\det D\phi| dm.
\end{aligned}$$

Assim, $\forall \psi \geq 0$ simples,

$$\int_{\phi(\Omega)} \psi dm \leq \int_\Omega \psi \circ \phi |\det D\phi| dm. \tag{6}$$

7. Dada $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ boreliana, $\exists (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções simples tal que $\psi_n \overset{\text{p.}}{\nearrow} f$. Assim, pelo teorema da convergência monótona:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{\phi(\Omega)} \psi_n dm}_{} = \int \chi_{\phi(\Omega)} \cdot \psi_n dm \xrightarrow{\text{TCM}} \int \chi_{\phi(\Omega)} f dm \\
&\overset{(6)}{\leq} \int \chi_\Omega \cdot \psi_n \circ \phi \cdot |\det D\phi| dm \xrightarrow{\text{TCM}} \int_\Omega f \circ \phi |\det D\phi| dm
\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\phi(\Omega)} f dm \leq \int_\Omega f \circ \phi |\det D\phi| dm$$

(vale $\forall f \geq 0$, boreliana).

8. Agora, pela estimativa da parte 7, com $F \doteq f \circ \phi |\det D\phi|$ e ϕ^{-1} no lugar de f e ϕ, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega = \phi^{-1}(\phi(\Omega))} F dm &\leq \int_{\phi(\Omega)} F \circ \phi^{-1} |\det D\phi^{-1}| dm = \\
&= \int_{\phi(\Omega)} \underbrace{f \circ \phi \circ \phi^{-1}(x)}_{= f(x)} \underbrace{|\det D\phi(\phi^{-1}(x))| |\det D\phi^{-1}(x)|}_{= |\det \underbrace{D\phi(\phi^{-1}(x)) \circ D\phi^{-1}(x)}_{= D(\phi \circ \phi^{-1})(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} | = 1} dm(x) = \\
&= \int_{\phi(\Omega)} f dm
\end{aligned}$$

<u>Conclusão</u>: $\forall f \geq 0$ boreliana,

$$\int_{\phi(\Omega)} f dm \overset{(\triangle)}{=} \int_\Omega f \circ \phi |\det D\phi| dm.$$

Daí, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ estiver em L^1, podemos aplicar $(\triangle)$ para $(\mathrm{Re} f)^\pm$, $(\mathrm{Im} f)^\pm$ e concluir que $\chi_\Omega \cdot f \circ \phi \cdot |\det D\phi| \in L^1(m)$, e que vale $(\triangle)$ para f.

La contredanse est finie.

- Aplicação to teorema de mudança de variáveis: definir medidas em variedades riemannianas (vide livro do Taylor).