MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798
Notas da Aula 13 (4/5)

I) Medida Produto (continuação)

Teorema 1 (Tonelli). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável, $f \geq 0$. Então (1) as aplicações $X \to [0, \infty]$ e $Y \to [0, \infty]$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto \int f_x d\nu$ e $y \mapsto \int f^y d\mu$ são ambas mensuráveis (e ≥ 0) e:

$$(2) \int f d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f_x d\nu \right] d\mu = \int \left[\int f^y d\mu \right] d\nu.$$

- Prova:
  - (i) Se $f = \chi_E$, com $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, (1) e (2) já foram provados na proposição anterior.
  - (ii) Segue de (i) que (1) e (2) também valem se f for simples ≥ 0; com efeito, se $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ (representação padrão), tem-se, $\forall x \in X$:

$$f_x = \sum_{i=1}^n a_i (\chi_{E_i})_x$$

e

$$\int f_x d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int (\chi_{E_i})_x d\nu$$

daí $x \mapsto \int f_x d\nu$ é mensurável e

$$\int \left[\int f_x d\nu \right] d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\int \left[\int (\chi_{E_i})_x d\nu \right] d\mu}_{\overset{\text{(i)}}{=} \int \chi_{E_i} d(\mu \times \nu) = \mu \times \nu(E_i)} = \int f d(\mu \times \nu),$$

e argumento análogo se aplica para seções "y".

  - (iii) Dada $f \in L^+(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, tome $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente de funções simples ≥ 0 tal que $\phi_n \overset{\text{p}}{\nearrow} f$. Então, $\forall x \in X$, $(\phi_n)_x \overset{\text{p}}{\nearrow} f_x$ e, pelo TCM,

$$\int (\phi_n)_x d\nu \nearrow \int f_x d\nu$$

Daí $x \mapsto \int f_x d\nu$ é $\mathcal{M}$-mensurável (pois é o limite pontual de uma sequência de $\mathcal{M}$-mensuráveis) e, novamente pelo TCM:

$$\underbrace{\int \left[\int (\phi_n)_x d\nu \right] d\mu}_{\overset{\text{(ii)}}{=} \int \phi_n d(\mu \times \nu) \overset{\text{TCM}}{\to} \int f d(\mu \times \nu)} \overset{\text{TCM}}{\to} \int \left[\int f_x d\nu \right] d\mu$$

Por unicidade do limite, segue

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$$

e argumento análogo para as seções "y".

Teorema 2 (Fubini). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-finitos.

(a) Se $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ for $\mu \times \nu$-quase integrável, então:

(1) • Para μ-q.t. $x \in X$, f_x é quase-integrável e $x \mapsto \int f_x d\nu$ é uma função mensurável (definida quase sempre) e quase-integrável.

- Para ν-q.t. $y \in Y$, f^y é quase-integrável e $y \mapsto \int f^y d\mu$ é uma função mensurável e quase-integrável.

(2)
$$\int \left[\int f_x d\nu \right] d\mu = \int f d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f^y d\mu \right] d\nu$$

(b) Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$, então valem (1) e (2) acima substituindo-se "quase-integrável" por "integrável".

- Prova:
  (i) Basta provar (a). Por hipótese, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ é quase-integrável; digamos, $\int f^+ d(\mu \times \nu) < \infty$.
  (ii) Note que, $\forall x \in X$, $(f_x)^+ = (f^+)_x$; omitiremos, pois, os parênteses da notação e escreveremos f_x^+.
  (iii) Pelo teorema de Tonelli aplicado a f^+ e f^-, tem-se:
  $$\begin{aligned} X &\to [0, \infty] \\ x &\mapsto \int f_x^{\pm} d\nu \end{aligned}$$
  é mensurável e
  $$\int \left[\int f_x^{\pm} d\nu \right] d\mu = \int f^{\pm} d(\mu \times \nu)$$
  (iv) Como $\int f^+ d(\mu \times \nu) < \infty$ tem-se
  $$\int \left[\int f_x^+ d\nu \right] d\mu < \infty$$
  daí $\exists N \in \mathcal{M}$ com $\mu(N^c) = 0$ e $(\forall x \in N)$ $\int f_x^+ d\nu < \infty$. Então, $\forall x \in N$, f_x é quase-integrável e
  $$\int f_x d\nu = \int f_x^+ d\nu - \int f_x^- d\nu$$
  e daí
  $$\begin{aligned} N &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \int f_x d\nu \end{aligned}$$
  é mensurável, i.e. $x \mapsto \int f_x d\nu$ é mensurável no sentido estendido. Note que
  $$\left(\int f_x d\nu \right)^+ = \begin{cases} \int f_x d\nu = \int f_x^+ d\nu - \int f_x^- d\nu \leq \int f_x^+ d\nu & \text{se } \int f_x d\nu \geq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
  Daí, $\forall x \in N$, $(\int f_x d\nu)^+ \leq \int f_x^+ d\nu$ e, como $x \mapsto \int f_x^+ d\nu$ é integrável, segue que $x \mapsto (\int f_x d\nu)^+$ é integrável e daí $x \mapsto \int f_x d\nu$ é quase-integrável e
  $$\int \left[\int \underbrace{f_x}_{=f_x^+ - f_x^-} d\nu \right] d\mu = \int \left[\int f_x^+ d\nu - \int f_x^- d\nu \right] d\mu = \underbrace{\int \left[\int f_x^+ d\nu \right] d\mu}_{= \int f^+ d(\mu \times \nu)} - \underbrace{\int \left[\int f_x^- d\nu \right] d\mu}_{= \int f^- d(\mu \times \nu)} = \int f d(\mu \times \nu)$$
  Para seções "y" o argumento é análogo.

- Observação: Os dois teoremas acima são, em geral, aplicados "in tandem". Tipicamente, dada $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável, queremos calcular $\int f$ via integrais interadas. A estratégia é:
  (i) Calcule $\int |f|$ por Tonelli.
  (ii) Se $\int |f| < \infty$, aplica-se Fubini para calcular $\int f$, calculando-se integrais iteradas.

Teorema 3. (Fubini para medidas completas) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e completos, e $(X \times Y, \overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}, \lambda)$ o completamento de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Dada f $\overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$-mensurável e a) $f \geq 0$ ou b) $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, tem-se:

(1) Para μ-q.t. $x \in X$, f_x é $\mathcal{N}$-mensurável (≥ 0 com a), $\in \mathcal{L}^1(\nu)$ com b)), a função definida q.s. $x \mapsto \int f_x d\nu$ é mensurável (≥ 0 com a) e $\in \mathcal{L}^1(\mu)$ com b)) e:

(2)

$$\int \left[\int f_x d\nu \right] d\mu = \int f d\lambda$$

Enunciado análogo para seções "y".

Observação. O teorema acima se aplica, em particular, para o completamento de $(\mathbb{R}^n = \prod_1^n \mathbb{R}, \otimes_1^n \mathcal{L}, \prod_1^n m)$, onde $\mathcal{L}$ é a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e m a medida de Lebesgue em $\mathcal{L}$. Como veremos na próxima seção, tal completamento é o espaço de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$.