

I) Medida Produto (continuação)

DEFINIÇÃO 1 (classe monótona). Sejam X conjunto, $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(X)$. $\mathcal{C}$ diz-se uma classe monótona se $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e:

- (i) $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ crescente $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$
- (ii) $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ decrescente $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$

- Exemplo: Toda σ -álgebra é uma classe monótona.

PROPOSIÇÃO 1. A intersecção de uma família $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de classes monótonas em X é uma classe monótona se for não-vazia.

DEFINIÇÃO 2. Dado $E \subset 2^X$, a classe monótona gerada por E é a intersecção da família de todas as classes monótonas $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(X)$ tais que $E \subset \mathcal{C}$. Notação: $\mathcal{C}(E)$.

TEOREMA 1 (Lema da Classe Monótona). Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathbb{P}(X)$. Então $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

- Prova: É claro que $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Para verificar a outra inclusão, basta mostrar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma σ -álgebra. Com efeito, para cada $E \in \mathcal{C} \doteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$, defina $C(E) = \{F \in \mathcal{C} \mid E \setminus F \in \mathcal{C}, F \setminus E \in \mathcal{C} \text{ e } F \cap E \in \mathcal{C}\}$. Note que, dados $E, F \in \mathcal{C}$, $F \in C(E) \Leftrightarrow E \in C(F)$ (por simetria na definição de $C(E)$).

- Afirmção: $\forall E \in \mathcal{C}$, $C(E) = \mathcal{C}$. Nesse caso, $\forall E, F \in \mathcal{C}$, $E \setminus F \in \mathcal{C}$ e $E \cap F \in \mathcal{C}$. Daí, como $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ é fechada por complementação e intersecção finita. Ou seja, $\mathcal{C}$ é uma álgebra e é fechada por união enumerável crescente $\therefore \mathcal{C}$ é σ -álgebra.

- Prova da afirmação:

1. $\forall E \in \mathcal{C}$, $C(E)$ é uma classe monótona. Com efeito:

- (i) $C(E) \neq \emptyset$ (pois $E \in C(E)$)
- (ii) Se $(F_n)_n \subset C(E)$ crescente, tem-se:

(ii.1)

$$\left(\bigcup_n F_n \right) \setminus E = \bigcup_n \underbrace{(F_n \setminus E)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

(ii.2)

$$E \setminus \left(\bigcup_n F_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(E \setminus F_n)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

(ii.3)

$$E \cap \left(\bigcup_n F_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(E \cap F_n)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

- (iii) Se $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(E)$ decrescente, tem-se:

(iii.1)

$$\left(\bigcap_n F_n \right) \setminus E = \bigcap_n \underbrace{(F_n \setminus E)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

(iii.2)

$$E \setminus \left(\bigcap_n F_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(E \setminus F_n)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

(iii.3)

$$E \cap \left(\bigcap_n F_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(E \cap F_n)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

$\therefore C(E)$ é uma classe monótona, como afirmamos.

2. Dado $E \in \mathcal{A}$, tem-se:

(i) $\mathcal{A} \subset C(E)$, i.e. $\forall F \in \mathcal{A}, F \in C(E)$. Então $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset C(E)$ (pois $C(E)$ é classe monótona, por 1.). Daí, $\mathcal{C} = C(E)$.

3. Dado $F \in \mathcal{C}$, afirmo que $\mathcal{A} \subset C(F)$. Com efeito, $\forall E \in \mathcal{A}$, por 2. $F \in C(E) \Leftrightarrow E \in C(F)$, i.e. $\mathcal{A} \subset C(F)$. Daí, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset C(F) \therefore \mathcal{C} = C(F)$.

PROPOSIÇÃO 2. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos. Dado $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$:

1. as aplicações $X \rightarrow [0, \infty]$ e $Y \rightarrow [0, \infty]$ definidas, respectivamente, por $x \mapsto \nu(E_x)$ e $x \mapsto \mu(E^y)$, são ambas mensuráveis.
2. $\int \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E) = \int \mu(E^y) d\nu(y)$.

• Prova da proposição:

(i) Suponha μ e ν finitos. Seja $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \mid 1. \text{ e } 2. \text{ valem para } E\}$. $\vdash \mathcal{C} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Basta mostrar:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}$ é uma classe monótona.

Daí: $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{Lema da classe monótona}}{=} \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e então $\mathcal{C} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Tem-se:

(a) Se $E = A \times B \in \mathcal{R}$ (i.e. $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$),

$$\forall x \in X, E_x = \begin{cases} B & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\therefore \nu(E_x) = \chi_A(x) \nu(B) \therefore x \mapsto \nu(E_x)$ é mensurável. Analogamente, $y \mapsto \mu(E^y)$ é mensurável. Além disso,

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \chi_A(x) \nu(B) d\mu(x) = \nu(B) \underbrace{\int \chi_A d\mu}_{=\mu(A)} = \mu(A) \nu(B) = (\mu \times \nu)(A \times B) = (\mu \times \nu)(E)$$

Analogamente,

$$\int \mu(E^y) d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E)$$

(b) Se $E = \dot{\cup}_{i=1}^n E_i$ com $E_i \in \mathcal{R}$ para $1 \leq i \leq n$: $(\forall x \in X) E_x = \dot{\cup}_{i=1}^n (E_i)_x \therefore \nu(E_x) = \sum_{i=1}^n \nu((E_i)_x)$
 $\therefore$ 1. vale para $x \mapsto \nu(E_x)$. Além disso:

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\int \nu((E_i)_x) d\mu(x)}_{\stackrel{\text{por (a)}}{=} (\mu \times \nu)(E_i)} = \mu \times \nu(E)$$

$\therefore$ 2. vale para $\int \nu(E_x) d\mu$. Para as seções “y” o argumento é análogo. Então $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

(c) Afirmo que $\mathcal{C}$ é classe monótona. É claro que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pois $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

(c.1) Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$ crescente. $\vdash E \doteq \cup_n E_n \in \mathcal{C}$. Com efeito:

- $\forall x \in X$: $(\cup_n E_n)_x = \cup_n (E_n)_x$ e, pela continuidade para cima de ν , segue $\nu(E_x) = \lim \nu((E_n)_x)$ é $\mathcal{M}$ -mensurável.
- Como $x \mapsto \nu((E_n)_x)$ cresce pontualmente para $x \mapsto \nu(E_x)$, pelo TCM

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int \nu((E_n)_x) d\mu(x)}_{(*)} \xrightarrow{\text{TCM}} \int \nu(E_x) d\mu(x) \\ &= \mu \times \nu(E_n) \xrightarrow{(*)} \mu \times \nu(E) \end{aligned}$$

onde $(*)$ vale pela continuidade para cima para $\mu \times \nu$. Portanto, pela unicidade do limite, segue:

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E)$$

O mesmo argumento se aplica para as seções “y” e conclui-se que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$.

(c.2) Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$ decrescente. $\vdash E \doteq \cap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$. Com efeito:

- $\forall x \in X$: $(\cap_{n \in \mathbb{N}} E_n)_x = \cap_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x$ e, como ν é finita, segue, pela continuidade para baixo de ν , que $\nu(E_x) = \lim \nu((E_n)_x)$ daí $x \mapsto \nu(E_x)$ é $\mathcal{M}$ -mensurável. Note que, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\nu((E_n)_x) \leq \nu(Y) < \infty$, $\therefore \nu(Y)\chi_X$ é uma função integrável que domina a sequência $x \mapsto \nu((E_n)_x)$ e, pelo TCD:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int \nu((E_n)_x) d\mu(x)}_{= \mu \times \nu(E_n)} \xrightarrow{\text{TCD}} \int \nu(E_x) d\mu(x) \\ & = \mu \times \nu(E_n) \xrightarrow{(**)} \mu \times \nu(E) \end{aligned}$$

onde (**) vale pela continuidade para baixo de $\mu \times \nu$. Logo, pela unicidade do limite, segue:

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E)$$

O mesmo vale para as seções “y”, $\therefore E$ satisfaz 1. e 2., i.e. $E \in \mathcal{C}$. Daí $\mathcal{C}$ é classe monótona, como afirmado. Então $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{C}$, o que prova a tese no caso μ e ν finitas.

- (ii) Caso geral, i.e. μ e ν σ -finitas. Posso tomar $(A_n \times B_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{R}$ crescente tal que $(\forall n) \mu \times \nu(A_n \times B_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) < \infty$ e $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n = X \times Y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o caso (i) se aplica para a medida finita $(\mu \times \nu) \lrcorner (A_n \times B_n)$, a qual coincide com a medida produto das medidas finitas $\mu \lrcorner A_n$ e $\nu \lrcorner B_n$, conforme o último item do exercício abaixo:

Exercício:

Recorde a questão 10 da lista 2 (seção 1.3): dados $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$, $\mu \lrcorner E : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ dada por $A \mapsto \mu(A \cap E)$ é uma medida. Além disso:

- Se $f \in L^+$ ou $f \in L^1(\mu)$, $\int f d(\mu \lrcorner E) = \int_E f d\mu$.
- $\mu = \mu \lrcorner E + \mu \lrcorner E^c$. Portanto, conforme visto na questão 1 da lista 8, $L^1(\mu) = L^1(\mu \lrcorner E) \cap L^1(\mu \lrcorner E^c)$.
- Se $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ for outro espaço de medida, $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$ σ -finitos, então $(\mu \lrcorner A) \times (\nu \lrcorner B) = (\mu \times \nu) \lrcorner (A \times B)$.

Portanto, pela parte (i), $(\forall E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \forall n \in \mathbb{N}) x \in X \mapsto \nu \lrcorner B_n(E_x)$ é mensurável e:

$$\begin{aligned} \int \nu \lrcorner B_n(E_x) d(\mu \lrcorner A_n)(x) &= \mu \lrcorner A_n \times \nu \lrcorner B_n(E) = \\ &= \mu \times \nu(E \cap A_n \times B_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Como $(B_n)_n \prec \mathcal{N}$ é crescente e sua união é Y , segue-se que, $(\forall x \in X) \nu \lrcorner B_n(E_x) = \nu(E_x \cap B_n) \nearrow \nu(E_x)$, usando a continuidade para cima da medida ν . Daí $x \mapsto \nu(E_x)$ é mensurável (pois é o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis). E, como

$$(\forall x \in X) \chi_{A_n}(x) \nu \lrcorner B_n(E_x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu(E_x)$$

conclui-se pelo TCM que $\int \nu \lrcorner B_n(E_x) d(\mu \lrcorner A_n)(x) = \int \chi_{A_n}(x) \nu \lrcorner B_n(E_x) d\mu(x) \rightarrow \int \nu(E_x) d\mu(x)$. Portanto, por (1), este deve ser o limite de $\mu \times \nu(E \cap A_n \times B_n)$, o qual, usando a continuidade para cima da medida $\mu \times \nu$, também deve ser igual a $\mu \times \nu(E)$. Por unicidade do limite, conclui-se, finalmente, $\int \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E)$.

O mesmo vale para as seções “y”, daí a tese.