

# MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Notas da Aula 11 (27/4)

**I) Medida Produto** Sejam  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  espaços de medida. Queremos definir uma medida em  $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$  induzida por  $\mu$  e  $\nu$  de forma natural.

DEFINIÇÃO 1. Seja  $\mathcal{R} \doteq \{A \times B \mid A \in \mathcal{M} \text{ e } B \in \mathcal{N}\}$ . Os elementos de  $\mathcal{R}$  chamam-se retângulos mensuráveis.

PROPOSIÇÃO 1. Com a notação acima,  $\mathcal{R}$  é uma semi-álgebra. Com efeito:

- Se  $A \times B \in \mathcal{R}$  e  $A' \times B' \in \mathcal{R}$ ,

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = \underbrace{(A \cap A')}_{\in \mathcal{M}} \times \underbrace{(B \cap B')}_{\in \mathcal{N}} \in \mathcal{R}$$

- $X \times Y \in \mathcal{R}$
- Dado  $A \times B \in \mathcal{R}$ ,

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c) = (A^c \times Y) \dot{\cup} (X \times B^c)$$

COROLÁRIO 1. A álgebra  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$  gerada por  $\mathcal{R}$  é dada por:

$$\mathcal{A} = \{\dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i \times B_i \mid (A_i \times B_i)_{1 \leq i \leq n} \prec \mathcal{R}\}$$

- Note que  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  (pois  $\sigma(\mathcal{R}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{R})$ ).

DEFINIÇÃO 2.

$$\begin{aligned} \pi_0 : \mathcal{A} &\rightarrow [0, \infty) \\ E = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i \times B_i &\mapsto \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \nu(B_i) \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2. Com a notação acima,  $\pi_0$  está bem definida e é uma medida em  $\mathcal{A}$ .

LEMA 1. Seja  $A \times B \in \mathcal{R}$  e  $(A_i \times B_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{R}$  tal que  $A \times B = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} A_i \times B_i$ . Então  $\mu(A) \nu(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \nu(B_i)$ .

- Para verificar que  $\pi_0$  está bem definida:

$$E = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i \times B_i = \dot{\bigcup}_{j=1}^m A'_j \times B'_j$$

Então:

$$(\forall i) A_i \times B_i = (A_i \times B_i) \cap E = \dot{\bigcup}_{j=1}^m (A_i \cap A'_j) \times (B_i \cap B'_j)$$

Portanto, pelo lema  $\mu(A_i) \nu(B_i) = \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap A'_j) \nu(B_i \cap B'_j)$ , donde  $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \nu(B_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap A'_j) \nu(B_i \cap B'_j)$  e o mesmo vale para  $\sum_{j=1}^m A'_j \times B'_j$ .

- Prova do lema: Note que

$$\begin{aligned} \underbrace{\chi_{A \times B}}_{\chi_A \cdot \chi_B} &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\chi_{A_i \times B_i}}_{\chi_{A_i} \cdot \chi_{B_i}} \\ &= \chi_A \cdot \chi_B \end{aligned}$$

i.e.  $\forall x \in X, \forall y \in Y$ :

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y)$$

Fixe  $y \in Y$  e olhe para os dois membros como funções mensuráveis positivas de  $x$ . Tem-se:

$$\underbrace{\int \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) d\mu(x)}_{= \chi_B(y) \mu(A)} = \underbrace{\int \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y) d\mu(x)}_{\stackrel{\text{TCM}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\int \chi_{A_i}(x) \chi_{B_i}(y) d\mu(x)}_{= \chi_{B_i}(y) \mu(A_i)}}$$

Assim,  $\forall y \in Y$ :

$$\mu(A) \cdot \chi_B(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{B_i}(y) \cdot \mu(A_i)$$

Dai:

$$\underbrace{\int \mu(A) \cdot \chi_B(y) d\nu(y)}_{= \mu(A) \cdot \nu(B)} = \underbrace{\int \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{B_i}(y) \mu(A_i) d\nu(y)}_{\stackrel{\text{TCM}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\int \chi_{B_i}(y) \mu(A_i) d\nu(y)}_{= \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)}}$$

- Prova da proposição: exercício, usando o lema.
- Como  $\pi_0$  é uma medida em  $\mathcal{A}$ , segue do teorema de extensão de Carathéodory que
  1. A restrição da medida exterior  $\pi^*$  induzida por  $\pi_0$  a  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{A})$  é uma medida que estende  $\pi_0$ .  
Definição: Tal medida chama-se medida produto e denota-se por  $\mu \otimes \nu = \mu \times \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty]$ .
  2. A restrição de  $\pi^*$  a  $\sigma(\pi^*) \supset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  é uma medida completa, a qual denotaremos por  $\overline{\mu \times \nu}$ . Note que  $(X \times Y, \sigma(\pi^*), \overline{\mu \times \nu})$  é o saturamento do completamento de  $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ .
  3. Se  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  forem  $\sigma$ -finitos,  $\pi_0$  também o é. Com efeito, tome:
    - (a)  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$  com  $(\forall i) \mu(A_i) < \infty$  e  $\dot{\cup}_{i \in \mathbb{N}} A_i = X$ .
    - (b)  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{N}$  com  $(\forall j) \nu(B_j) < \infty$  e  $\dot{\cup}_{j \in \mathbb{N}} B_j = Y$ .
 Então,  $(A_i \times B_j)_{i, j \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$  é tal que  $(\forall i, j) \pi_0(A_i \times B_j) = \mu(A_i) \nu(B_j) < \infty$  e  $\cup_{i, j \in \mathbb{N}} A_i \times B_j = X \times Y$ . Nesse caso, pela unicidade dada pelo teorema de extensão de Carathéodory,  $\mu \times \nu$  é a única extensão de  $\pi_0$  a uma medida em  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  ( $\therefore$  é a única medida em  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  que, em todo retângulo mensurável  $A \times B \in \mathcal{R}$ , é dada por  $\mu(A) \nu(B)$ ). Além disso,  $\overline{\mu \times \nu}$  é o completamento de  $\mu \times \nu$ .

- Observações:

1. A mesma construção pode ser feita para uma sequência finita  $\{(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  de espaços mensuráveis, obtendo-se uma medida  $\prod_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $\prod_{i=1}^n \mu_i(A_i \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i)$  se  $(A_1 \times \cdots \times A_n) \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ .
2. Valem as relações de associatividade esperadas. Por exemplo, se  $\{(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq 3}$ , as bijeções:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times X_2 \times X_3 & \xrightarrow{\cong} & (X_1 \times X_2) \times X_3 & \xrightarrow{\cong} & X_1 \times (X_2 \times X_3) \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & ((x_1, x_2), x_3) & \mapsto & (x_1, (x_2, x_3)) \end{array}$$

induzem isomorfismos mensuráveis

$$\begin{aligned} (X_1 \times X_2 \times X_3, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3) &\equiv ((X_1 \times X_2) \times X_3, (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3) \\ &\equiv (X_1 \times (X_2 \times X_3), \mathcal{M}_1 \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3)) \end{aligned}$$

e, com essas identificações:

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$$

- Próximo objetivo: Dados  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  espaços de medida, queremos investigar integrabilidade e calcular integrais em  $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$  através de integrais iteradas.
- Fixemos, até o final desta seção,  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  espaços de medida.

- Notação:

1. Para  $E \subset X \times Y$  e  $x \in X, y \in Y$

$$E_x \doteq \{y \in Y | (x, y) \in E\} \subset Y$$

$$E^y \doteq \{x \in X | (x, y) \in E\} \subset X$$

2. Para  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}, x \in X, y \in Y$

$$f_x \doteq f(x, \cdot) : Y \rightarrow \mathbb{K}$$

$$f^y \doteq f(\cdot, y) : X \rightarrow \mathbb{K}$$

PROPOSIÇÃO 3. Com a notação acima:

- (a) Se  $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ :  $\forall x \in X, E_x \in \mathcal{N}$  e  $\forall y \in Y, E^y \in \mathcal{M}$ .
- (b) Se  $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{K}$  é mensurável:  $\forall x \in X, f_x : (Y, \mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{K}$  é mensurável e  $\forall y \in Y, f^y : (X, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{K}$  é mensurável.

- Prova:

- (a) 1. Se  $E = A \times B \in \mathcal{R}$ :

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \notin A \\ B & \text{se } x \in A \end{cases} \in \mathcal{N}$$

Analogamente

$$E^y = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \notin B \\ A & \text{se } y \in B \end{cases} \in \mathcal{M}$$

2. Seja  $\mathcal{C} = \{E \subset X \times Y | \forall x \in X, \forall y \in Y, E_x \in \mathcal{N} \text{ e } E^y \in \mathcal{M}\}$ . Já vimos que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ .  $\vdash \mathcal{C}$  é  $\sigma$ -álgebra (daí  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{C}$  e daí a tese). Com efeito:
  - (i)  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  (pois  $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ )
  - (ii) Seja  $E \in \mathcal{C}$ .  $\vdash E^c \in \mathcal{C}$ . De fato,  $(\forall x \in X) (E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{N}$  (pois  $y \in (E^c)_x \Leftrightarrow (x, y) \in E^c \Leftrightarrow (x, y) \notin E \Leftrightarrow y \notin E_x \Leftrightarrow y \in (E_x)^c$ ) e  $(\forall y \in Y) (E^c)^y = (E^y)^c \in \mathcal{M} \therefore E^c \in \mathcal{C}$ .
  - (iii) Seja  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$ .  $\vdash \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$ . Ora,  $\forall x \in X$ :

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x \in \mathcal{N}$$

(pois  $y \in (\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n)_x \Leftrightarrow (x, y) \in \cup_n E_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} | (x, y) \in E_n \Leftrightarrow y \in \cup_n (E_n)_x$ )  
Analogamente,  $\forall y \in Y$ :

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^y = \bigcup_n (E_n)^y \in \mathcal{M}$$

$\therefore \cup_n E_n \in \mathcal{C} \therefore \mathcal{C}$  é  $\sigma$ -álgebra.

- (b) É corolário de (a), pois,  $\forall B \subset \mathbb{K}$  aberto,

$$(\forall x \in X) (f_x)^{-1}(B) = [f^{-1}(B)]_x \stackrel{\text{por (a)}}{\in} \mathcal{N}$$

(pois  $y \in (f_x)^{-1}(B) \Leftrightarrow f_x(y) \in B \Leftrightarrow f(x, y) \in B \Leftrightarrow (x, y) \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow y \in [f^{-1}(B)]_x$ ) e argumento análogo para  $f^y$ .