MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2020

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Notas da Aula 10 (22/4)

I) Modos de Convergência.

Fixemos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

Definição 1. Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X (digamos, a valores em $\mathbb{C}$). Diz-se que:

[P] $(f_n)_n$ converge *pontualmente* para f (notação: $f_n \overset{p.}{\to} f$) se $\forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[U] $(f_n)_n$ converge *uniformemente* para f (notação: $f_n \overset{u.}{\to} f$) se $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[AE] $(f_n)_n$ converge *quase sempre* para f (notação: $f_n \to f$ μ *a.e.*) se $\exists N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N^c) = 0$ e $f_n \overset{p.}{\to} f$ em N, i.e. se $\exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) = 0, \forall \epsilon > 0, \forall x \in N, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[L^∞] $(f_n)_n$ converge *em* L^∞ para f (notação: $f_n \overset{\mathsf{L}^\infty}{\to} f$) se $\exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) = 0, f_n \overset{u.}{\to} f$ em N; verifique que esta condição é equivalente a $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) = 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[AU] $(f_n)_n$ converge *quase uniformemente* para f (notação: $f_n \overset{a.u.}{\to} f$) se $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) < \epsilon$ e $f_n \overset{u.}{\to} f$ em N; verifique que esta condição é equivalente a $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} : \mu(N^c) < \epsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[L^1] $(f_n)_n$ converge *em* L^1 para f (notação: $f_n \overset{\mathsf{L}^1}{\to} f$) se $\int |f_n - f| \to 0$.

[M] $(f_n)_n$ converge *em medida* para f (notação: $f_n \overset{m.}{\to} f$) se $\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0$; verifique que esta condição é equivalente a $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) < \epsilon$.

Proposição 1 (linearidade). Dados $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ sequências de funções mensuráveis $X \to \mathbb{C}$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em um dos sete modos de convergência da definição acima, então $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ no mesmo modo de convergência. Além disso, $f_n \to f$ num dos sete modos de convergência acima ***see*** $|f_n - f| \to 0$ no mesmo modo.

Proposição 2 (unicidade). Seja $(f_n)_n$ sequência de funções mensuráveis e $f, g : X \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis tais que $f_n \to f$ num dos sete modos de convergência da lista acima e $f_n \to g$ noutro modo (podendo ser o mesmo) da lista acima. Então $f = g$ μ-a.e.

Observação. Nas proposições abaixo, são apresentadas várias implicações entre os modos de convergência listados na definição acima. Algumas das implicações são imediatas; outras, são teoremas. Excluiremos da discussão os casos em que a convergência é uniforme, pontual ou em L^∞, pois as implicações envolvidas nesse caso são obtidas, em geral, por alguma verificação direta ou, eventualmente, a partir das outras implicações listadas. Em todos os diagramas, "convergência em L^1" pode ser substituída por "convergência em L^p", com $1 \leq p < \infty$ (os espaços L^p serão introduzidos posteriormente no curso). Algumas das implicações "notáveis" (i.e. teoremas) são demonstradas abaixo; as demais são deixadas como exercícios.

Definição 2 (convergência dominada). Com a notação acima, se $f_n \to f$ num dos modos de convergência listados, diz-se que a convergência é *dominada* se existir $g : X \to [0, \infty)$ integrável tal que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ (ou se a desigualdade valer μ-a.e.).

Proposição 3 (relação entre os modos de convergência, caso geral). Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X. Valem as implicações listadas no diagrama abaixo entre os modos de convergência de $f_n \to f$. Uma linha tracejada no diagrama significa que o modo de convergência em questão implica a existência de uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para f no modo indicado pela seta.

$$\begin{tikzcd}
AE & AU \arrow[l] \arrow[d, shift left] \\
\mathsf{L}^1 \arrow[u, dashed] \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & M \arrow[u, dashed, shift left] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

Proposição 4 (relação entre os modos de convergência, caso em que μ é finita). Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X. Suponha que a medida μ seja finita. Valem as implicações listadas no diagrama abaixo entre os modos de convergência de $f_n \to f$.

$$\begin{tikzcd}
AE \arrow[r, shift left] \arrow[rd] & AU \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\
\mathsf{L}^1 \arrow[u, dashed] \arrow[ru, dashed] \arrow[r] & M \arrow[u, dashed, shift left] \arrow[lu, dashed, shift left]
\end{tikzcd}$$

Proposição 5 (relação entre os modos de convergência, caso em que a convergência é dominada). Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X. Suponha que $(f_n)_n$ seja dominada por uma função $g : X \to [0,\infty)$ integrável. Valem as implicações listadas no diagrama abaixo entre os modos de convergência de $f_n \to f$.

$$\begin{tikzcd}
AE \arrow[r, shift left] \arrow[rd] \arrow[d, shift left] & AU \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[ld] \\
\mathsf{L}^1 \arrow[u, dashed, shift left] \arrow[ru, dashed, shift left] \arrow[r, shift left] & M \arrow[u, dashed, shift left] \arrow[lu, dashed, shift left] \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

Teorema 1 (Egorov). Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ espaço de medida finito, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X. Se $f_n \to f$ a.e., então $f_n \overset{a.u.}{\to} f$.

Demonstração. Podemos supor SPG que $f_n \overset{p.}{\to} f$, por um argumento trivial. Defina, para $n, m \in \mathbb{N}$:

$$E_n(m) \doteq \cup_{k\geqslant n}\{|f_k - f| \geq 1/m\},$$

de modo que $\{E_n(m)\}_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ é uma sequência decrescente.

Note que, como $f_n \overset{p.}{\to} f$, $(\forall m \in \mathbb{N}) \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n(m) = \emptyset$. Portanto, pela finitude da medida e pela continuidade para baixo, conclui-se que $(\forall m \in \mathbb{N})\mu\big(E_n(m)\big) \overset{n}{\to} 0$. Daí, fixado $\epsilon > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos escolher $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\big(E_{k_m}(m)\big) < 2^{-m}\epsilon$. Então $\cup_{m\in\mathbb{N}}E_{k_m}(m)$ tem medida menor que ϵ e, no seu complementar, $f_n \overset{u.}{\to} f$. $\square$

Definição 3. Uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções mensuráveis em X diz-se *de Cauchy em medida* se, $\forall\epsilon > 0, \lim_{m,n\to\infty}\mu\big(\{|f_m - f_n| > \epsilon\}\big) = 0$. Verifique que esta condição é equivalente a, $\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, \mu\big(\{|f_m - f_n| > \epsilon\}\big) < \epsilon$.

Note que, se $f_n \overset{m.}{\to} f$ em medida, então $(f_n)_n$ é, trivialmente, de Cauchy em medida. A recíproca está contida no enunciado abaixo:

Teorema 2 (Riesz). Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em medida. Então existe (e é única μ-q.s.) $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável tal que $f_n \to f$ em medida. Além disso, existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_n$ que converge para f quase uniformemente (e, em particular, converge quase sempre).

Demonstração. A unicidade fica como exercício.

Em relação à existência, provaremos a existência de $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável e de $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(f_n)_n$ tal que $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge quase uniformemente para f. Então a referida subsequência também converge em medida (pois convergência quase uniforme implica convergência em medida, trivialmente) e, tendo em vista que $(f_n)_n$ é de Cauchy em medida, isso implica que $f_n \to f$ em medida (verifique).

Tome $(g_j = f_{n_j})_j$ subsequência de $(f_n)_n$ tal que, pondo $(\forall j \in \mathbb{N})E_j \doteq \{|g_{j+1} - g_j| > 2^{-j}\} \in \mathcal{M}$, tenha-se $\mu(E_j) < 2^{-j}$; tal subsequência existe, pelo fato de ser $(f_n)_n$ de Cauchy em medida. Pomos, $(\forall n)F_n \doteq \cup_{j\geq n}E_j \in \mathcal{M}$ e $F \doteq \limsup E_j = \cap_{n\in\mathbb{N}}F_n \in \mathcal{M}$. Note que $(\forall n)\mu(F_n) \leq \sum_{j\geq n}\mu(E_j) \leq 2^{-n+1}$, donde segue $\mu(F) = 0$. Além disso, para x no complementar de F, $\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{j\geq n} \{|g_{j+1} - g_l| \leq 2^{-j}\}$, $\big(g_j(x)\big)_j$ é convergente em $\mathbb{C}$ (pois a série $\sum_{j=1}^{\infty}[g_{j+1}(x) - g_j(x)]$ é absolutamente convergente, por ser dominada por uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ a partir de algum índice n). Ponha $f : X \to \mathbb{C}$ dada por $f = 0$ em F e f igual ao limite pontual de $(g_j)_j$ em F^c. Então f é mensurável e é o limite μ-q.s. de $(g_j)_j$. Além disso, como $(\forall n)\mu(F_n) < 2^{-n+1}$ e $(\forall x \in F_n^c, \forall i > j \geq n)|g_i(x) - g_j(x)| \leq 2^{-j+1}$, fazendo $j = n$ e $i \to \infty$ obtém-se $|g_n - f| \leq 2^{-n+1}$ em F_n^c, de modo que, $(\forall n \in \mathbb{N})\mu\big(\{|g_n - f| > 2^{-n+1}\}\big) < 2^{-n+1}$, portanto $(g_n)_n$ converge quase uniformemente para f. $\square$

Corolário 1. Se $f_n \stackrel{\mathsf{L}^1}{\to} f$, então $(f_n)_n$ admite uma subsequência que converge quase uniformemente (logo converge μ-q.s.) para f.

Demonstração. Basta observar que $f_n \stackrel{\mathsf{L}^1}{\to} f$ implica Se $f_n \stackrel{m.}{\to} f$ (verifique). $\square$