MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2020

http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798

Notas da Aula 1 (2/3)

I) Henri Lebesgue, 1902: Intégrale, Longueur, Aire.

II) O Problema da Medida

DEFINIÇÃO 1. Seja X um conjunto. Uma *função de conjuntos em X* é uma função cujo domínio é um subconjunto de $2^X = \mathbb{P}(X)$.

DEFINIÇÃO 2. Seja X um conjunto e $\mu : \mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X) \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $[0, \infty]$). Diz-se que μ é:

(i) *finitamente aditiva* se

$$\left. \begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \text{ disjuntos em } \mathcal{A} \\ A = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

(ii) *σ -aditiva* (ou *enumeravelmente aditiva*) se

$$\left. \begin{array}{l} (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ família disjunta em } \mathcal{A} \\ A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

- Tentativa de se definir um “volume n -dimensional” em $\mathbb{R}^n$: uma ideia natural é tomar $\mu : \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ tal que

- (i) μ σ -aditiva (ou (i') finitamente aditiva)
- (ii) Se A congruente a B em $\mathbb{R}^n$, $\mu(A) = \mu(B)$
- (iii) $\mu([0, 1]^n) = 1$

- Para $n \geq 3$, seja com (i) ou com (i'), não existe uma tal μ .

TEOREMA 1 (paradoxo de Banach-Tarski). Sejam U, V abertos limitados em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Então $\exists k \in \mathbb{N}$ e

- * $E_1, \dots, E_k$ disjuntos em $\mathbb{R}^n$ cuja reunião é U
- * $F_1, \dots, F_k$ disjuntos em $\mathbb{R}^n$ cuja união é V
- * E_i congruente a F_i para $1 \leq i \leq k$
- Remediaremos esta situação, definindo-se μ num domínio menor que o conjunto das partes.

III) Preliminares

- Linguagem da teoria dos conjuntos: seção 0 do Folland.
- A reta estendida:

$$\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

- Relação de ordem em $\overline{\mathbb{R}}$: $a < b$ se
 - (i) $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ ou
 - (ii) $a = -\infty, b \neq -\infty$ ou
 - (iii) $b = +\infty, a \neq +\infty$
- $<$ é uma relação de ordem *total* (i.e. quaisquer dois elementos se comparam) e *completa* (i.e. todo conjunto não vazio e limitado superiormente admite supremo). Além disso, todo conjunto não vazio é limitado superiormente (por $+\infty$) e inferiormente (por $-\infty$), portanto admite supremo e ínfimo.
- Em $\overline{\mathbb{R}}$, consideramos a topologia da ordem, i.e., gerada pela sub-base:

$$\underbrace{\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < a\}}_{=L_a}, \underbrace{\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > b\}}_{=R_b} : a, b \in \mathbb{R}$$

– Uma base para a referida topologia é $\{L_a, R_b, L_a \cap R_b : a, b \in \mathbb{R}\}$

- Com a topologia acima, $\overline{\mathbb{R}}$ é um espaço metrizable, compacto (é uma compactificação de $\mathbb{R}$). Além disso, as operações $+$: $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $\cdot$: $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(\pm\infty, 0), (0, \pm\infty)\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definidas da maneira óbvia, são contínuas.

- Seja $\{x_n\}_n$ sequência em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\lim}x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$$

$$\underline{\lim}x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$$

(A sequência é convergente se e somente se o limite superior é igual ao limite inferior. É a mesma definição que na reta.)

- Analogamente, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup\{f(x) : 0 < |x - a| < \delta\}$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf\{f(x) : 0 < |x - a| < \delta\}$$

DEFINIÇÃO 3. $0 \cdot \pm\infty \doteq 0$ e $\pm\infty \cdot 0 \doteq 0$

– *Atenção:* $\cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ não é contínua em $(0, \pm\infty)$ e $(\pm\infty, 0)$.

* De fato: Tome $(x_n, y_n) \doteq (+\infty, \frac{1}{n})$. Então:

$$(x_n, y_n) \rightarrow (+\infty, 0)$$

$$x_n \cdot y_n = \infty \neq +\infty \cdot 0 = 0$$

– *Observação:* $\cdot : [0, \infty] \times [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ obtida por restrição:

* é “upward continuous”, ou seja:

$$\text{se } \begin{cases} x_n \uparrow x \text{ em } [0, \infty] \\ y_n \uparrow y \text{ em } [0, \infty] \end{cases} \text{ então } x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y$$

* não é “downward continuous”:

$$x_n = +\infty$$

$$y_n = \frac{1}{n}$$

é tal que $x_n \downarrow +\infty, y_n \downarrow 0$ mas $x_n \cdot y_n = +\infty$.

* Essa assimetria surge pela forma como se definiu $0 \cdot \pm\infty = 0$ e acarretará outras assimetrias mais adiante.

IV) Classes de Conjuntos

DEFINIÇÃO 4. Sejam X um conjunto $\emptyset \neq \mathcal{A} \in \mathbb{P}(X)$. Diz-se que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra* (respectivamente, uma *σ -álgebra*) se for fechada por complementação, i.e., $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$, e por união finita, i.e., $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (respectivamente, por união enumerável, i.e. se $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sequência em $\mathcal{A}$, $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$).

Exemplo 1. Seja X um conjunto.

- $\mathbb{P}(X)$ é uma σ -álgebra
- $\{\emptyset, X\} \subset \mathbb{P}(X)$ é uma σ -álgebra
- $\mathcal{A} \doteq \{A \subset X \mid A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$ é uma álgebra:
 - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, trivialmente
 - Sejam $B, C \in \mathcal{A}$
 - Se ambos forem finitos, $B \cup C$ é finito
 - Se um deles for cofinito, $B \cup C$ é cofinito

Em qualquer dos casos, $B \cup C \in \mathcal{A}$. Se X for infinito, $\mathcal{A}$ não é uma σ -álgebra.

- $\mathcal{A} \doteq \{A \subset X \mid A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$ é σ -álgebra.

PROPOSIÇÃO 1. Seja $\mathcal{A}$ σ -álgebra de conjuntos de X . Tem-se:

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A}$ é fechada por intersecção enumerável.

Demonstração. (i) é imediato e (ii) segue das *Regras de Morgan*:

Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in A}$ família em $\mathbb{P}(X)$, então:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha^c$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha^c$$

□

NOTAÇÃO.

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec X$ para denotar $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ (i.e. x é uma sequência a valores no conjunto X).

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec X$ para denotar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec X$ e $x_n \cap x_m = \emptyset$ se $n \neq m$ (assumindo que os elementos de X sejam conjuntos).

PROPOSIÇÃO 2. Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ uma álgebra. São equivalentes:

(a) $\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável.

(b) $\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável crescente, i.e. $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente $\Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável disjunta, i.e. $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ $\Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

PROPOSIÇÃO 3. Seja X um conjunto, $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de σ -álgebras de X . Então $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha \in \mathbb{P}(X)$ é uma σ -álgebra.

DEFINIÇÃO 5. Sejam X conjunto, $S \subset \mathbb{P}(X)$. Pela proposição anterior existe uma σ -álgebra $\sigma(S) \subset \mathbb{P}(X)$ tal que:

(i) $S \subset \sigma(S)$

(ii) $\forall \mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ σ -álgebra com $S \subset \mathcal{A}$, $\sigma(S) \subset \mathcal{A}$.

A saber, $\sigma(S) = \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X) \mid \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-álgebra e } S \subseteq \mathcal{A} \}$. $\sigma(S)$ chama-se σ -álgebra gerada por S .

Observação 1. De forma análoga, dado $S \subset \mathbb{P}(X)$, faz sentido considerar a álgebra gerada por S : é a intersecção de todas as álgebras que contém S .

DEFINIÇÃO 6. Seja (X, τ) espaço topológico. A σ -álgebra $\sigma(\tau)$ chama-se σ -álgebra de Borel de (X, τ) e denota-se por $\mathcal{B}(X)$ ou $\mathcal{B}_X$.

V) Aplicações Mensuráveis

DEFINIÇÃO 7. Um espaço mensurável é um par $(X, \mathcal{A})$ onde X é um conjunto, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ é uma σ -álgebra.

DEFINIÇÃO 8. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ diz-se *mensurável* se $\forall B \in \mathcal{B}$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

PROPOSIÇÃO 4. Se, com a notação acima, $\mathcal{B} = \sigma(S)$, para que ϕ seja mensurável basta que, $\forall B \in S$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

PROPOSIÇÃO 5. Sejam

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{\psi} (Z, \mathcal{C})$$

aplicações mensuráveis entre espaços mensuráveis. Então $\psi \circ \phi$ é mensurável.

Observação 2 (Propriedades da pré-imagem). Seja $\phi : X \rightarrow Y$. Tem-se:

(i) Se $(A_\alpha)_{\alpha \in A}$ família da subconjuntos de Y , então:

$$\phi^{-1} \left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} \phi^{-1}(A_\alpha)$$

$$\phi^{-1} \left(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} \phi^{-1}(A_\alpha)$$

(ii)

$$\forall A \subset Y, \phi^{-1}(A^c) = (\phi^{-1}(A))^c$$