

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015

Prof. Gláucio Terra

Lista 7 - 9/04/2015

1 Seção 2.4

32-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito. Dadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis, defina:

$$\rho(f, g) \doteq \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

Então, identificando funções que coincidem q.s., ρ define uma métrica no conjunto das funções mensuráveis e $f_n \rightarrow f$ com respeito a esta métrica *see* $f_n \rightarrow f$ em medida.

33-) Se $f_n \geq 0$ e $f_n \rightarrow f$ em medida, então $\int f \leq \liminf \int f_n$.

34-) Suponha $|f_n| \leq g \in L^1$ e $f_n \rightarrow f$ em medida. Então:

(a) $\int f = \lim \int f_n$.

(b) $f_n \rightarrow f$ em L^1 .

35-) $f_n \rightarrow f$ em medida *see* $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq N) \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \epsilon$.

36-) Se $(\forall n \in \mathbb{N}) \mu(E_n) < \infty$ e $\chi_{E_n} \rightarrow f$ em L^1 , então f coincide q.s. com a função característica de um conjunto mensurável.

37-) Sejam $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis e $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

(a) Se ϕ for contínua e $f_n \rightarrow f$ q.s., então $\phi \circ f_n \rightarrow \phi \circ f$ q.s.

(b) Se ϕ for uniformemente contínua e $f_n \rightarrow f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida), então $\phi \circ f_n \rightarrow \phi \circ f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida).

38-) Suponha $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ em medida.

(a) $(f_n + g_n) \rightarrow f + g$ em medida.

(b) $f_n g_n \rightarrow f g$ em medida se $\mu(X) < \infty$, mas não necessariamente se $\mu(X) = \infty$.

39-) Se $f_n \rightarrow f$ quase uniformemente, então $f_n \rightarrow f$ q.s. e em medida.

40-) No teorema de Egorov, a hipótese " $\mu(X) < \infty$ " pode ser substituída por " $|f_n| \leq g$, onde $g \in L^1$ ".

41-) Se μ é σ -finita e $f_n \rightarrow f$ q.s., existem mensuráveis $E_1, E_2, \dots \subset X$ tais que $\mu((\cup_1^\infty E_n)^c) = 0$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em cada E_n .

42-) Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Então $f_n \rightarrow f$ em medida *see* $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

43-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $f : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $(\forall x \in X) f(x, \cdot)$ seja contínua e $(\forall y \in [0, 1]) f(\cdot, y)$ seja mensurável.

- (a) Dados $0 < \epsilon, \delta < 1$, $E_{\epsilon, \delta} \doteq \{x \in X : |f(x, y) - f(x, 0)| \leq \epsilon \text{ para } y < \delta\}$ é mensurável.
- (b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) < \epsilon$ e $f(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot, 0)$ uniformemente em E quando $y \rightarrow 0$.

44-) (TEOREMA DE LUZIN) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset [a, b]$ tal que $m([a, b] \setminus K) < \epsilon$ e $f|_K$ é contínua.