MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015
Prof. Gláucio Terra

Lista 5 - 26/03/2015

Questão 1-) (i) Defina sgn : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $\operatorname{sgn}(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$ e $\operatorname{sgn}(0) = 0$, de modo que $(\forall z \in \mathbb{C})\, z = \operatorname{sgn}(z) \cdot |z|$. Então sgn é mensurável.

(ii) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$. Então $f = \operatorname{sgn}(f) \cdot |f|$ (esta é a *decomposição polar* de f); f é mensurável ***see*** $\operatorname{sgn}(f)$ e $|f|$ o forem.

Questão 2-) Demonstre as proposições 2.11 e 2.12.

Questão 3-) (prop. 2.16, cor. 2.17 e prop. 2.20) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida.

(i) Se $f \in \mathrm{L}^+$, então $\int f = 0$ ***see*** $f = 0$ a.e.

(ii) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathrm{L}^+$ e $f_n \nearrow f$ a.e., então $\int f_n \to \int f$.

(iii) Se $f \in \mathrm{L}^+$ e $\int f < \infty$, então $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ é um conjunto nulo e $\{x \in X : f(x) > 0\}$ é σ-finito.

Questão 4-) Sejam $(X, \mathcal{M} = 2^X, \mu)$, onde μ é a medida de contagem, e $f : X \to [0, \infty]$. Então $f \in \mathrm{L}^+$ e $\int f = \sum_X f$. Portanto, f é integrável com respeito à medida de contagem ***see*** f for somável (i.e. se a soma não ordenada for finita).

1 Seção 2.2

13-) Seja $(f_n) \prec \mathrm{L}^+$, $f_n \to f$ pontualmente e $\int f = \lim \int f_n < \infty$. Então $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f = \lim \int_E f_n$. Isto não ocorre, em geral, se $\int f = \lim \int f_n = \infty$.

14-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $f \in \mathrm{L}^+$, e $(\forall E \in \mathcal{M})\lambda(E) \doteq \int_E f \,\mathrm{d}\mu$. Então λ é uma medida em $\mathcal{M}$ e, para toda $g \in \mathrm{L}^+$, $\int g \,\mathrm{d}\lambda = \int gf \,\mathrm{d}\mu$.

15-) Seja $(f_n) \prec \mathrm{L}^+$ tal que $f_n \searrow f$ pontualmente e $\int f_1 < \infty$. Então $\int f = \lim \int f_n$.

16-) Se $f \in \mathrm{L}^+$ e $\int f < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$ e $\int_E f > (\int f) - \epsilon$.

17-) Assuma o lema de Fatou e demonstre a partir do mesmo o teorema da convergência monótona.