

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015

Prof. Gláucio Terra

Complemento da Lista 3 - 20/03/2015

Questão 1-) Todo $x \in [0, 1]$ admite uma representação na base 3 da forma $0.x_1x_2\cdots$, i.e. existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \{0, 1, 2\}$ tal que $x = \sum_1^\infty x_n 3^{-n}$. Tal representação diz-se *finita* ou *eventualmente nula* se existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > N$; caso contrário, diz-se que a representação é *infinita*. Tem-se:

- (i) $x \in [0, 1]$ admite uma representação finita $x = 0.x_1x_2\cdots$ na base 3 *see* $\exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \{0, \dots, 3^n - 1\}$ tais que $x = k3^{-n}$.
- (ii) todo $x \in]0, 1]$ admite única representação infinita na base 3 $x = 0.x_1x_2\cdots$.

DEFINIÇÃO 1 Com a notação da questão anterior, associemos a cada $x \in [0, 1]$ uma representação na base 3, $x = 0.x_1x_2\cdots$, da seguinte forma:

- (i) se x não admitir representação finita, associemos a x a única representação possível;
- (ii) se x admitir representação finita $0.x_1\cdots x_N0\cdots$, com $x_N \neq 0$ e $x_n = 0$ para $n > N$: se $x_N = 2$, associemos a x a referida representação; se x_N for 1, associemos a x a representação infinita, i.e. $0.x_1\cdots x_{N-1}0222\cdots$.

Chamemos tais representações de normalizadas.

Questão 2-) Seja C o conjunto ternário de Cantor.

- (i) C é compacto, não-vazio, magro (i.e. seu fecho tem interior vazio), totalmente desconexo (i.e. os únicos subconjuntos conexos de C são pontos) e não tem pontos isolados.
- (ii) $m(C) = 0$.
- (iii) Usando a notação da definição anterior, C é o conjunto dos pontos de $[0, 1]$ em cuja representação normalizada não aparece o dígito 1. SUGESTÃO: Seja $(T_n)_{n \geq 0}$ definida indutivamente por $T_0 = [0, 1]$ e, para $n \geq 1$, T_n o conjunto obtido na n -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, i.e. T_n é a reunião dos intervalos fechados que sobram após a remoção dos terços médios dos intervalos de T_{n-1} . Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, T_n é o conjunto dos pontos cuja representação normalizada na base 3 é da forma $0.x_1\cdots x_n\cdots$ com $x_i \in \{0, 2\}$ para $1 \leq i \leq n$.
- (iv) Pelo item anterior, fica bem definida a aplicação $f : C \rightarrow [0, 1]$ tal que, se a representação normalizada de x na base 3 for $0.x_1x_2\cdots$, então $f(x) \in [0, 1]$ tem representação na base 2 dada por $0.y_1y_2\cdots$, onde $(\forall n \in \mathbb{N}) y_n = x_n/2$. Então f é sobrejetiva; portanto, $\text{card}(C) = \mathfrak{c}$. Além disso, f é crescente e, dados $x, y \in [0, 1]$ com $x < y$, então $f(x) = f(y)$ *see* (x, y) é um dos intervalos que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor.
- (v) Com a notação do item anterior, defina $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por $F|_C = f$ e, em cada intervalo (x, y) que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor, F é constante e igual a $f(x) = f(y)$. Então F é crescente e contínua. F chama-se *função de Cantor-Lebesgue*.

Questão 3-) Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{L}$, respectivamente, as σ -álgebras de Borel e de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Mostre que $\text{card}(\mathcal{B}) = \mathfrak{c}$ e $\text{card}(\mathcal{L}) = 2^{\mathfrak{c}}$; conclua que $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$. SUGESTÃO: Use a proposição 1.23 do Folland.