

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015

Prof. Gláucio Terra

Lista 17

1 Seção 6.2

17-) Com a notação do teorema 6.14, se μ é semi-finita, $q < \infty$ e $M_q(g) < \infty$, então, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $\{|g| > \epsilon\}$ tem medida finita. Conclua que $S_g = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ é σ -finito.

18-) A reflexividade de L^2 segue da teoria de espaços de Hilbert. Tal fato pode ser usado para demonstrar o teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym através do seguinte argumento, devido a von Neumann. Sejam μ, ν medidas positivas finitas em $(X, \mathcal{M})$ (o caso σ -finito é consequência do caso em que a medida é finita, pelo mesmo argumento usado anteriormente), e seja $\lambda \doteq \mu + \nu$.

- (a) O funcional $f \mapsto \int f d\nu$ é linear contínuo em $L^2(\lambda)$. Portanto, o teorema de representação de Riesz garante a existência de $g \in L^2(\lambda)$ tal que $(\forall f \in L^2(\lambda)) \int f d\nu = \int fg d\lambda$. Equivalentemente, $(\forall f \in L^2(\lambda)) \int f(1-g) d\nu = \int fg d\mu$.
- (b) $0 \leq g \leq 1$ λ -q.s., de modo que podemos assumir $0 \leq g \leq 1$ em toda parte.
- (c) Sejam $A \doteq \{x : g(x) < 1\}$ e $B \doteq \{x : g(x) = 1\}$. Defina $\nu_a(E) \doteq \nu(A \cap E)$ e $\nu_s(E) \doteq \nu(B \cap E)$. Então $\nu_s \perp \mu$ e $\nu_a \ll \mu$; de fato, $d\nu_a = g(1-g)^{-1} \chi_A d\mu$.

20-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^p(\mu)$. Mostre que, se $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty$ e $f_n \rightarrow f$ μ -q.s., então $(f_n)_n$ converge para f fracamente (i.e. se q for o conjugado de p , para toda $g \in L^q$, $\int f_n g \rightarrow \int fg$).

SUGESTÃO: Dados $g \in L^q$ e $\epsilon > 0$: (i) existe $\delta > 0$ tal que $\forall E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \delta$, $\int_E |g|^q < \epsilon$; (ii) existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$ e $\int_{X \setminus A} |g|^q < \epsilon$; (iii) tomando δ como em (i) e A como em (ii), existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) < \delta$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em B .

2 Exercícios Complementares

Questão 1-) (desigualdade de Chebyshev) Sejam, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $0 < p < \infty$ e $f \in L^p(\mu)$. Então, para todo $\alpha > 0$,

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha} \right)^p.$$

Questão 2-) (teorema 6.18) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos e $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável. Suponha que exista $C > 0$ tal que $\int |K(x, y)| d\mu(x) \leq C$ para q.t. $y \in Y$ e $\int |K(x, y)| d\nu(y) \leq C$ para q.t. $x \in X$. Então, para $1 \leq p \leq \infty$ e para toda $f \in L^p(\nu)$, a integral

$$Tf(x) \doteq \int K(x, y)f(y) d\nu(y)$$

converge absolutamente para q.t. $x \in X$. Além disso, a função Tf , definida μ -q.s., pertence a $L^p(\mu)$ e $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$.

Questão 3- (teorema 6.19 - forma integral da desigualdade de Minkowski) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ -finitos e f uma função $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável em $X \times Y$.

(i) Se $f \in L^+$, então, para $1 \leq p < \infty$:

$$\left[\int \left(\int f(x, y) \, d\nu(y) \right)^p \, d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \int \left(\int f(x, y)^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \, d\nu(y).$$

(ii) Se $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ para q.t. $y \in Y$ e $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p \in L^1(\nu)$, então para q.t. $x \in X$ $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$, $x \mapsto \int f(x, y) \, d\nu(y)$ está em $L^p(\mu)$ e:

$$\left\| \int f(\cdot, y) \, d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p \, d\nu(y).$$

DEFINIÇÃO 1 (CONVOLUÇÃO) Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ Borel-mensuráveis (ou, mais geralmente, Lebesgue-mensuráveis, mas suponha Borel-mensuráveis para simplificar), de modo que é Borel-mensurável a aplicação $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$. Definimos $f * g$ por:

$$f * g(x) \doteq \int f(x - y)g(y) \, dm(y),$$

para todo x tal que $f(x - \cdot)g(\cdot)$ seja quase-integrável.

Questão 4- (desigualdade de Young) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$ e, dado $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n, m)$, então $f * g$ está definida m -q.s., pertence a $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. **SUGESTÃO:** Use uma das duas questões anteriores.

Questão 5- Sejam $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$. Então $f * g = g * f \in L^1$ e $(f * g) * h = f * (g * h) \in L^1$. Portanto, da questão anterior segue que, munido do produto de convolução, $L^1(\mathbb{R}^n, m)$ é uma álgebra de Banach abeliana.