

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015

Prof. Gláucio Terra

Lista 13 - 18/05/2015

Questão 1-) Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ convexo. Mostre que ∂X tem medida de Lebesgue 0.

1 Seção 3.4

23-) Uma variante útil da função maximal de Hardy-Littlewood é:

$$H^*f(x) \doteq \sup\left\{\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| \, dy : B \text{ é uma bola e } x \in B\right\}.$$

Mostre que $Hf \leq H^*f \leq 2^n Hf$.

24-) Se $f \in L^1_{loc}$ e f é contínua em x , então x pertence ao conjunto de Lebesgue de f .

25-) Seja $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. A densidade $D_E(x)$ de E em x é definida por:

$$D_E(x) \doteq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{m(B_r(x))},$$

sempre que o limite existir.

(a) Mostre que $D_E(x) = 1$ q.s. em E e $D_E(x) = 0$ q.s. em E^c .

(b) Encontre exemplos de E e x tais que $D_E(x) \in (0, 1)$ ou $D_E(x)$ não existe.