

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015

Prof. Gláucio Terra

Lista 12 - 14/05/2015

1 Seção 3.3

18-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $f \in L^1(\nu)$. Então $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ e $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$.

19-) Se ν, μ são medidas complexas e λ é uma medida positiva, então $\nu \perp \mu$ *see* $|\nu| \perp |\mu|$, e $\nu \ll \lambda$ *see* $|\nu| \ll \lambda$.

20-) Se ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $\nu(X) = |\nu|(X)$, então $\nu = |\nu|$.

21-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$. Defina:

$$\begin{aligned}\mu_1(E) &\doteq \sup\left\{\sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, (E_j)_{j=1}^n \prec \mathcal{M}, E = \cup_{j=1}^n E_j\right\} \\ \mu_2(E) &\doteq \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| : (E_j)_{j=1}^{\infty} \prec \mathcal{M}, E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j\right\} \\ \mu_3(E) &\doteq \sup\left\{\left|\int_E f d\nu\right| : f \in L^1(\nu), |f| \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$. SUGESTÃO: Mostre que $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$. Para verificar que $\mu_3 = |\nu|$, tome $f \doteq d\nu/d|\nu|$. Para verificar que $\mu_3 \leq \mu_1$, aproxime f por funções simples.