

## MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015

Prof. Gláucio Terra

Lista 10 - 05/05/2015

### 1 Seção 2.7

62-) A medida  $\sigma$  em  $S^{n-1}$  é invariante por rotações.

63-) (INTEGRAIS DE POLINÔMIOS EM  $S^{n-1}$ ). A técnica usada para se calcular  $\sigma(S^{n-1})$  pode ser aplicada para se calcular integrais de polinômios em  $S^{n-1}$ . Por exemplo, seja  $f(x) = \prod_1^n x_j^{\alpha_j}$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Então  $\int f d\sigma = 0$  se algum dos  $\alpha_j$  for ímpar; se todos os  $\alpha_j$  forem pares, tem-se:

$$\int f d\sigma = \frac{2\Gamma(\beta_1) \cdots \Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1 + \cdots + \beta_n)}, \text{ onde } \beta_j \doteq \frac{\alpha_j + 1}{2}.$$

### 2 Seção 3.1

1-) Seja  $\nu$  uma medida com sinal em  $(X, \mathcal{M})$ . Se  $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$  é uma sequência crescente, então  $\nu(\cup_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$ . Se  $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$  é uma sequência decrescente e  $\nu(E_1) < \infty$ , então  $\nu(\cap_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$ .

2-) Se  $\nu$  é uma medida com sinal,  $E \in \mathcal{M}$  é  $\nu$ -nulo *see*  $|\nu|(E) = 0$ . Além disso, se  $\mu, \nu$  são medidas com sinal, tem-se:  $\nu \perp \mu$  *see*  $|\nu| \perp \mu$  *see*  $\nu^+ \perp \mu$  e  $\nu^- \perp \mu$ .

3-) Seja  $\nu$  uma medida com sinal em  $(X, \mathcal{M})$ . Tem-se:

(a)  $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ .

(b) Se  $f \in L^1(\nu)$ , então  $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$ .

(c) Se  $|\nu|$  for semi-finita, então, para todo  $E \in \mathcal{M}$ ,  $|\nu|(E) = \sup\{|\int f d\nu| : f \in L^1(\nu) \text{ e } |f| \leq 1\}$ .

4-) Se  $\nu$  é uma medida com sinal e  $\lambda, \mu$  são medidas positivas tais que  $\nu = \lambda - \mu$ , então  $\lambda \geq \nu^+$  e  $\mu \geq \nu^-$ .

5-) Sejam  $\nu_1$  e  $\nu_2$  medidas com sinal. Suponha que ambas omitam o valor  $+\infty$  ou o valor  $-\infty$ . Então  $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$ .

6-) Seja  $\nu(E) \doteq \int_E f d\mu$ , onde  $\mu$  é uma medida positiva e  $f$  é  $\mu$ -quase integrável. Descreva as decomposições de Hahn de  $\nu$  e as variações positiva, negativa e total de  $\nu$  em termos de  $f$  e  $\mu$ .

7-) Sejam  $\nu$  uma medida com sinal em  $(X, \mathcal{M})$  e  $E \in \mathcal{M}$ .

(a)  $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$  e  $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$ .

(b)  $|\nu|(E) = \sup\{|\sum_1^n \nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, (E_j)_1^n \prec \mathcal{M} \text{ e } \cup_1^n E_j = E\}$ .