MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2015

Prof. Gláucio Terra

Lista 1 - 05/03/2015

1 Exercícios propostos em aula e outros:

Questão 1-) Proposições 1.2 a 1.7 do Folland.

Questão 2-) (generalização da prop. 1.5) Sejam $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $X = \prod_{i\in I} X_i$ munido da topologia produto. Então $\otimes_{i\in I}\mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$; vale a igualdade se X tiver base enumerável de abertos (o que é equivalente a cada X_i ter base enumerável e ser enumerável o conjunto dos $i \in I$ tal que X_i tem mais que um ponto). Como corolário, conclua que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Questão 3-) Sejam X um conjunto, $f : X \to [0, \infty]$ e $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ dada por $\mu(E) \doteq \sum_E f$. Então:

(i) μ é uma medida em $(X, \mathcal{P}(X))$.

(ii) μ é semi-finita ***see*** $(\forall x \in X) f(x) < \infty$.

(iii) μ é σ-finita ***see*** for semi-finita e f se anular fora de um conjunto enumerável.

Questão 4-) Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$.

(i) Existe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ tal que $(\forall 1 \leqslant k \leqslant \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.

(ii) Existe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente tal que $(\forall 1 \leqslant k \leqslant \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.

Questão 5-) (teorema 1.8 - propriedades das medidas) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Valem as seguintes propriedades:

i) monotonicidade: Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leqslant \mu(F)$.

ii) subaditividade enumerável: Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, então $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

iii) continuidade inferior: Se Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ crescente, então $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim \mu(E_n)$.

iv) continuidade superior: Se Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ decrescente e $\mu(E_1) < \infty$, então $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim \mu(E_n)$. Apresente um contra-exemplo sem a hipótese $\mu(E_1) < \infty$.

DEFINIÇÃO 1 *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Diz-se que $E \subset \mathcal{M}$ é* nulo *se $\mu(E) = 0$. Diz-se que μ é* completa *se todo subconjunto de um conjunto nulo for mensurável.*

Questão 6-) (teorema 1.9 - completamento de um espaço de medida) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{N} \doteq \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) = 0\}$. Defina $\overline{\mathcal{M}} \doteq \{E \cup F : E \in \mathcal{M} \text{ e } F \subset N, N \in \mathcal{N}\}$. Então $\overline{\mathcal{M}}$ é uma σ-álgebra em X e existe uma única extensão $\overline{\mu}$ de μ a uma medida completa em $\overline{\mathcal{M}}$.

2 Exercícios do Folland

2.1 Seção 1.2

1-) Uma classe de conjuntos $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(X)$ chama-se *anel* se for fechada por uniões finitas e diferenças (i.e. se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R}$ então $\cup_1^n E_i \in \mathcal{R}$ e se $E, F \in \mathcal{R}$ então $E - F \in \mathcal{R}$). Um anel fechado por uniões enumeráveis chama-se σ*-anel*.

(a) Anéis (resp. σ-anéis) são fechados por intersecções finitas (resp. enumeráveis).

(b) Se $\mathcal{R}$ for um anel (resp. σ-anel), então $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp. σ-álgebra) **see** $X \in \mathcal{R}$.

(c) Se $\mathcal{R}$ for um σ-anel, então $\{E \subset X : E \in \mathcal{R} \text{ ou } E^c \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.

(d) Se $\mathcal{R}$ for um σ-anel, então $\{E \subset X : \forall F \in \mathcal{R}, E \cap F \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.

3-) Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra infinita.

(a) $\mathcal{M}$ contém uma sequência infinita de conjuntos disjuntos.

(b) $\text{card}(\mathcal{M}) \geqslant \mathfrak{c}$.

4-) Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra **see** for fechada por uniões enumeráveis crescentes (i.e. se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ for uma família crescente, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$).

5-) Se $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $\mathcal{M}$ é a união das σ-álgebras $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ geradas pelos subconjuntos enumeráveis $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$.

2.2 Seção 1.3

7-) Se $\mu_1, \dots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$. Isto vale para famílias arbitrárias $(\mu_i)_{i\in I}$ de medidas e $(a_i)_{i\in I} \prec [0, \infty)$, i.e. $\mu \doteq \sum_{i\in I} a_i \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$?

8-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$. Então $\mu(\liminf E_n) \leqslant \liminf \mu E_n$. Além disso, se $\mu(\cup_1^\infty E_n) < \infty$, então $\mu(\limsup E_n) \geqslant \limsup \mu E_n$.

9-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$. Então $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$.

10-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina $(\forall A \in \mathcal{M}) \mu \llcorner E(A) \doteq \mu(E \cap A)$. Então $\mu \llcorner E$ é uma medida.

11-) Uma *medida finitamente aditiva* μ em $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e, para toda $(E_n)_1^k \prec \mathcal{M}$, $\mu(\cup_1^k E_n) = \sum_1^k \mu(E_n)$. Verifique que uma medida finitamente aditiva μ em $(X, \mathcal{M})$ é uma medida **see** μ é contínua inferiormente. Se $\mu(X) < \infty$, esta condição também é equivalente a ser μ contínua superiormente.

12-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finito.

(a) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $\mu(E \Delta F) = 0$, então $\mu(E) = \mu(F)$.

(b) Defina $E \sim F$ se $\mu(E \Delta F) = 0$. Então μ é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$.

(c) Defina $\rho(E, F) \doteq \mu(E \Delta F)$. Então $\rho(E, G) \leqslant \rho(E, F) + \rho(F, G)$, de modo que ρ define uma métrica no quociente $\mathcal{M}/\sim$.

13-) Toda medida σ-finita é semi-finita.

14-) Sejam μ uma medida semi-finita e E mensurável tal que $\mu(E) = \infty$. Então, para todo $C > 0$, existe $F \subset E$ mensurável tal que $C < \mu(F) < \infty$.

15-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Defina μ_0 em $\mathcal{M}$ por $\mu_0(E) \doteq \sup\{\mu(F) : F \subset E$ mensurável e $\mu(F) < \infty\}$.

(a) μ_0 é uma medida semi-finita. Chama-se *parte semi-finita* de μ.

(b) Se μ é semi-finita, então $\mu = \mu_0$.

(c) Existe uma medida ν em $\mathcal{M}$ (em geral, não é única) que assume apenas valores 0 e ∞ tal que $\mu = \mu_0 + \nu$.

16-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ diz-se *localmente mensurável* se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\mathcal{M}_{loc}$ o coleção de todos os subconjuntos localmente mensuráveis de X. Então $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{loc}$. Se $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{M}$, diz-se que μ é *saturada*.

(a) Se μ for σ-finita, então μ é saturada.

(b) $\mathcal{M}_{loc}$ é uma σ-álgebra.

(c) Defina ν em $\mathcal{M}_{loc}$ por $\nu(E) \doteq \mu(E)$ se $E \in \mathcal{M}$ e $\nu(E) \doteq \infty$ caso contrário. Então ν é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$, chamada *saturação* de μ.

(d) Se μ for completa, ν também o é.

(e) Suponha que μ seja semi-finita. Dado $E \in \mathcal{M}_{loc}$, defina $\nu_0(E) \doteq \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M}$ e $A \subset E\}$. Então ν_1 é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$ que estende μ.

(f) Sejam X_1, X_2 conjuntos disjuntos enumeráveis e $X = X_1 \cup X_2$. Sejam $\mathcal{M}$ a σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis em X e μ_0 a medida de contagem em $\mathcal{P}(X_1)$. Defina μ em $\mathcal{M}$ por $\mu(E) \doteq \mu_0(E \cap X_1)$. Então μ é uma medida em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{P}(X)$ e, com a notação dos ítens anteriores, $\nu \neq \nu_0$.