# MAT5798 - Medida e Integração

Prof. Gláucio Terra

P1 - 30/04/2015

Nome:________________________________________

Assinatura:_____________________________________

**A primeira questão vale 1 ponto e as demais valem 1,5 ponto. Boa prova e boa diversão!**

**Questão 1-)** Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos de $X$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ a $\sigma$-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Sejam $\mu$ e $\nu$ medidas em $\mathcal{M}$. Suponha que $\mu$ e $\nu$ coincidam em $\mathcal{A}$ e que exista $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $(\forall n)\mu(A_n) < \infty$. Então $\mu = \nu$.

**Questão 2-)** (a) Sejam $X$ e $Y$ espaços Hausdorff compactos, $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$ as respectivas $\sigma$-álgebras de Borel. Então toda função contínua $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-mensurável. Sugestão: (1) Note que não há como garantir, com as hipóteses assumidas, que $\mathcal{B}_{X\times Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ (se esta igualdade valesse, a tese seria trivial); (2) Aplique o teorema de Stone-Weierstrass para alguma álgebra conveniente de funções contínuas.

(b) Se $X$ e $Y$ forem espaços métricos compactos, então $\mathcal{B}_{X\times Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$. Sugestão: Uma das inclusões vale para espaços topológicos quaisquer; para verificar a outra, mostre que todo compacto é $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-mensurável (para isso, use o item anterior).

(c) Se $X$ e $Y$ forem espaços métricos $\sigma$-compactos, então $\mathcal{B}_{X\times Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$.

**Questão 3-)** Sejam $V$ aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\mu$ medida boreliana (i.e. definida na $\sigma$-álgebra de Borel) finita em $\mathbb{R}^n$. Mostre que:

(i) $\partial V$ (i.e. fronteira topológica de $V$) é um boreliano;

(ii) se $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\mu(x + \partial V) = 0$, então a função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \mu(V + x)$ é contínua.

**Questão 4-)** Calcule, caso exista:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \log\big(2 + \cos(x/n)\big)\, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n\, \mathrm{e}^{-nx} \sin(1/x)\, \mathrm{d}x$

**Questão 5-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $(fn)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathsf{L}^+(X)$, $f \in \mathsf{L}^+(X)$ tais que $f_n \to f$ pontualmente e $(\forall n) f_n \leqslant f$. Então $\int f_n\, \mathrm{d}\mu \to \int f\, \mathrm{d}\mu$.

**Questão 6-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis $X \to \mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Suponha que $f_n \to f$ em $\mathsf{L}^1$ rapidamente (i.e. $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n - f\|_1 < \infty$). Então $f_n \to f$ quase uniformemente e, portanto, quase sempre.

**Questão 7-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida $\sigma$-finito e $f : X \to [0, \infty]$ mensurável. Então:

(a) A função $\lambda_f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definida por $\lambda_f(t) \doteq \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$ é Borel-mensurável.

(b) $\displaystyle\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,\infty]} \lambda_f(t)\,\mathrm{d}m(t)$, onde $m$ é a medida de Lebesgue.