MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012
Prof. Gláucio Terra

Lista 9 - 12/04/2012

Questão 1-) Sejam $B \doteq \{E \subset \mathbb{R}^n : E = \prod_1^n]a_i, b_i[, -\infty < a_i < b_i < \infty\}$ o conjunto dos intervalos abertos limitados n-dimensionais em $\mathbb{R}^n$ e $\rho : B \cup \{\emptyset\} \to [0, \infty]$ dada por $\rho(\emptyset) = 0$ e $\rho(\prod_1^n]a_i, b_i[) = \prod_1^n (b_i - a_i)$. Então ρ é uma pré-medida exterior e, sendo m^* a medida exterior induzida por ρ, o conjunto dos m^*-mensuráveis coincide com a σ-álgebra de Lebesgue e a restrição de m^* a este conjunto coincide com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Questão 2-) Demonstre os teoremas 2.40 e 2.41.

1 Seção 2.6

55-) Sejam $E = [0,1] \times [0,1]$ e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$. Investigue a existência e igualdade das integrais $\int_E f \, \mathrm{d}m^2$, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ e $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$.

56-) Sejam f Lebesgue-integrável em $(0,a)$ e $g : (0,a) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) \doteq \int_x^a t^{-1} f(t) \, \mathrm{d}t$. Então g é integrável em $(0,a)$ e $\int_0^a g(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x$.

57-) Mostre que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} x^{-1} \sin x \, \mathrm{d}x = \arctan(s^{-1})$ para $s > 0$. (Sugestão: Integre $\mathrm{e}^{-sxy} \sin x$ com respeito a x e a y.)

59-) Seja $f(x) = x^{-1} \sin x$.

(a) Mostre que $\int_0^\infty |f(x)| \, \mathrm{d}x = \infty$.

(b) Mostre que $\lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x) \, \mathrm{d}x = \pi/2$. Sugestão: Integre $\mathrm{e}^{-xy} \sin x$ com respeito a x e a y; em vista do item anterior, deve-se tomar algum cuidado ao tomar o limite para $b \to \infty$.