

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 8 - 10/04/2012

1 Seção 2.5

45-) Sejam $(X_j, \mathcal{M}_j)$ espaços mensuráveis, para $1 \leq j \leq 3$. Então $\otimes_1^3 \mathcal{M}_j = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$. Além disso, se μ_j é uma medida σ -finita em $(X_j, \mathcal{M}_j)$, então $\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$.

46-) Sejam $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, μ a medida de Lebesgue e ν a medida de contagem. Seja $D \doteq \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ a diagonal em $X \times Y$. Então $\int \chi_D d\mu d\nu$, $\int \chi_D d\nu d\mu$ e $\int \chi_D d(\mu \times \nu)$ são todos distintos.

48-) Sejam $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \nu$ a medida de contagem. Defina $f(m, n) \doteq 1$ se $m = n$, $f(m, n) \doteq -1$ se $m = n + 1$ e $f(m, n) = 0$ em qualquer outro caso. Então $\int |f| d(\mu \times \nu) = \infty$ e $\int f d\mu d\nu = \int f d\nu d\mu < \infty$.

49-) Prove o teorema 2.39. SUGESTÃO: Use o teorema 2.37, a proposição 2.12 e os seguintes lemas:

- (a) Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e $\mu \times \nu(E) = 0$, então $\nu(E_x) = 0 = \mu(E^y)$ para quase todo x e quase todo y .
- (b) Se f é $\mathcal{L}$ -mensurável e $f = 0$ λ -q.s., então f_x e f_y são integráveis para quase todo x e quase todo y , e $\int f_x d\nu = \int f_y d\mu = 0$ para quase todo x e quase todo y .

50-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida σ -finito e $f \in L^+$. Defina $G_f \doteq \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : y \leq f(x)\}$. Então G_f é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -mensurável e $\mu \times m(G_f) = \int f d\mu$. O mesmo vale se na definição de G_f for usada a desigualdade estrita.

51-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida arbitrários (não necessariamente σ -finitos).

- (a) Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é $\mathcal{M}$ -mensurável, $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ é $\mathcal{N}$ -mensurável e $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $h(x, y) = f(x)g(y)$, então h é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável.
- (b) Se $f \in L^1(\mu)$ e $g \in L^1(\nu)$, então $g \in L^1(\mu \times \nu)$ e $\int h d(\mu \times \nu) = (\int f d\mu)(\int g d\nu)$.

52-) O teorema de Fubini-Tonelli é válido se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida arbitrário e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ é tal que Y é um conjunto enumerável, $\mathcal{N} = \mathcal{P}(Y)$ e ν a medida de contagem.