MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012
Prof. Gláucio Terra

Lista 7 - 29/03/2012

1 Seção 2.4

32-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito. Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis, defina:

$$\rho(f,g) \doteq \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, \mathrm{d}\mu$$

Então, identificando funções que coincidem q.s., ρ define uma métrica no conjunto das funções mensuráveis e $f_n \to f$ com respeito a esta métrica ***see*** $f_n \to f$ em medida.

33-) Se $f_n \geqslant 0$ e $f_n \to f$ em medida, então $\int f \leqslant \liminf \int f_n$.

34-) Suponha $|f_n| \leqslant g \in \mathrm{L}^1$ e $f_n \to f$ em medida. Então:

(a) $\int f = \lim \int f_n$.
(b) $f_n \to f$ em L^1.

35-) $f_n \to f$ em medida ***see*** $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geqslant N)\, \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon\}) < \epsilon$.

36-) Se $(\forall n \in \mathbb{N})\, \mu(E_n) < \infty$ e $\chi_{E_n} \to f$ em L^1, então f coincide q.s. com a função característica de um conjunto mensurável.

37-) Sejam $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis e $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(a) Se ϕ for contínua e $f_n \to f$ q.s., então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ q.s.
(b) Se ϕ for uniformemente contínua e $f_n \to f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida), então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida).

38-) Suponha $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em medida.

(a) $(f_n + g_n) \to f + g$ em medida.
(b) $f_n g_n \to fg$ em medida se $\mu(X) < \infty$, mas não necessariamente se $\mu(X) = \infty$.

39-) Se $f_n \to f$ quase uniformemente, então $f_n \to f$ q.s. e em medida.

40-) No teorema de Egorov, a hipótese "$\mu(X) < \infty$" pode ser substituída por "$|f_n| \leqslant g$, onde $g \in \mathrm{L}^1$".

41-) Se μ é σ-finita e $f_n \to f$ q.s., existem mensuráveis $E_1, E_2, \ldots \subset X$ tais que $\mu((\cup_1^\infty E_n)^c) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente em cada E_n.

42-) Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Então $f_n \to f$ em medida ***see*** $f_n \to f$ uniformemente.

43-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $f : X \times [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $(\forall x \in X)\, f(x, \cdot)$ seja contínua e $(\forall y \in [0,1])\, f(\cdot, y)$ seja mensurável.

(a) Dados $0 < \epsilon, \delta < 1$, $E_{\epsilon,\delta} \doteq \{x \in X : |f(x,y) - f(x,0)| \leqslant \epsilon \text{ para } y < \delta\}$ é mensurável.

(b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) < \epsilon$ e $f(\cdot, y) \to f(\cdot, 0)$ uniformemente em E quando $y \to 0$.

44-) (Teorema de Luzin) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset [a,b]$ tal que $m([a,b] \setminus K) < \epsilon$ e $f|_K$ é contínua.