MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 6 - 27/03/2012

Questão 1-) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $\overline{\mathbb{R}}$, ambas limitadas inferiormente (ou superiormente) por um número real.

(i) $\inf a_n + \inf b_n \leqslant \inf(a_n + b_n) \leqslant \inf a_n + \sup b_n \leqslant \sup(a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n$.

(ii) $\liminf a_n + \liminf b_n \leqslant \liminf(a_n + b_n) \leqslant \liminf a_n + \limsup b_n \leqslant \limsup(a_n + b_n) \leqslant \limsup a_n + \limsup b_n$.

(iii) Se $(a_n)_n$ for convergente, $\liminf(a_n + b_n) = \lim a_n + \liminf b_n$ e $\limsup(a_n + b_n) = \lim a_n + \limsup b_n$.

Questão 2-) Demonstre a proposição 2.23 e o teorema 2.26.

Questão 3-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $\overline{\mu}$ o completamento de μ. Mostre que $\mathrm{L}^1(\mu) \equiv \mathrm{L}^1(\overline{\mu})$.

Questão 4-) (teorema 2.28) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Mostre que, se f for Riemman-integrável, então f é Lebesgue-mensurável (e, portanto, Lebesgue-integrável, pois é limitada) e as integrais de Riemann e de Lebesgue de f coincidem.
Sugestão: Para cada partição P de $[a, b]$, $P = (t_j)_0^n$, $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, defina $G_P \doteq \sum_1^n M_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}$ e $g_P \doteq \sum_1^n m_j \chi_{(t_{j-1},t_j]}$, onde $(\forall j) M_j \doteq \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$ e $m_j \doteq \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Definimos $|P| \doteq \max\{(t_j - t_{j-1}) : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Tome $(P_k)_k$ sequência crescente de partições tal que $|P_k| \to 0$. Então existem $g, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $g_{P_k} \nearrow g$ e $G_{P_k} \searrow G$ pontualmente, e $g \leqslant f \leqslant G$ em $(a, b]$. Verifique que $\int_{[a,b]} G \, \mathrm{d}m = \overline{\int_a^b} f$ e $\int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}m = \underline{\int_a^b} f$.

Questão 5-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ tal que $(\forall z \in \mathcal{U})\, f(\cdot, z) \in \mathrm{L}^1$, $(\forall x \in X)\, f(x, \cdot)$ é holomorfa. Suponha que exista $g \in \mathrm{L}^1$ tal que $(\forall z \in \mathcal{U})\, |\partial_z f(x, z)| \leqslant g(x)$. Então $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) \doteq \int f(x, z) \, \mathrm{d}\mu(x)$ é holomorfa e, $(\forall z \in \mathcal{U})\, F'(z) = \int \partial_z f(x, z) \, \mathrm{d}\mu(x)$.

Questão 6-) (função Γ) Sejam $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$ e $f_z : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por $f_z(t) \doteq t^{z-1} \, \mathrm{e}^{-t}$, onde $t^{z-1} = \exp[(z - 1) \log t]$.

(i) $(\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0)\, f_z \in \mathrm{L}^1(0, \infty)$.

(ii) $(\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0)\, \Gamma(z) \doteq \int_0^\infty t^{z-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ é holomorfa.

(iii) $(\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0)\, \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$. Sugestão: Integre por partes $\int_\epsilon^N t^z \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}$, faça $\epsilon \to 0$ e $N \to \infty$.

(iv) Use o item anterior para estender Γ a uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{n : n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \leqslant 0\}$. Verifique que $\Gamma(1) = 1$ e, portanto, $(\forall n \in \mathbb{N})\Gamma(n + 1) = n!$.

1 Seção 2.3

18-) O lema de Fatou continua válido se a hipótese $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n \in \mathrm{L}^+$ for substituída por $(\exists g \in \mathrm{L}^+ \cap \mathrm{L}^1, \forall n \in \mathbb{N}) f_n \geqslant -g$. Qual o análogo do lema de Fatou para funções negativas?

19-) Seja $(f_n) \prec \mathrm{L}^1(\mu)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente.

(a) Se $\mu(X) < \infty$, então $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ e $\int f_n \to \int f$.

(b) A conclusão do item anterior não vale, em geral, se $\mu(X) = \infty$ (encontre um contra-exemplo em $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue).

20-) (Teorema da Convergência Dominada generalizado) Sejam $(f_n), (g_n) \prec \mathrm{L}^1$, $f, g \in \mathrm{L}^1$ tais que $f_n \to f$ q.s. , $g_n \to g$ q.s., $|f_n| \leqslant g_n$ e $\int g_n \to \int g$. Então $\int f_n \to \int f$.

21-) Sejam $f_n, f \in \mathrm{L}^1$ tais que $f_n \to f$ q.s. Então $\int |f_n - f| \to 0$ **see** $\int |f_n| \to \int |f|$.

22-) Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Interprete o lema de Fatou, o teorema da convergência monótona e o teorema da convergência dominada em termos de proposições sobre séries infinitas.

23-) Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, defina:

$$H(x) \doteq \lim_{\delta \to 0} \sup_{|y-x| \leqslant \delta} f(y), \quad h(x) \doteq \lim_{\delta \to 0} \inf_{|y-x| \leqslant \delta} f(y).$$

Use o seguinte roteiro para provar que f é Riemann-integrável **see** o conjunto $D_f \subset [a, b]$ dos pontos de descontinuidade de f tem medida de Lebesgue 0:

(a) $H(x) = h(x)$ **see** f contínua em x.

(b) Para cada partição P de $[a, b]$, $P = (t_j)_0^n$, $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, defina $G_P \doteq \sum_1^n M_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$ e $g_P \doteq \sum_1^n m_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$, onde $(\forall j) M_j \doteq \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$ e $m_j \doteq \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Definimos $|P| \doteq \max\{(t_j - t_{j-1}) : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Tome $(P_k)_k$ sequência crescente de partições tal que $|P_k| \to 0$. Então existem $g, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $g_{P_k} \nearrow g$ e $G_{P_k} \searrow G$ pontualmente, e $g \leqslant f \leqslant G$ em $(a, b]$. Verifique que $h = g$ e $H = G$ q.s., de modo que h e H são Lebesgue-mensuráveis, $\int_{[a,b]} H \, \mathrm{d}m = \overline{\int_a^b} f$ e $\int_{[a,b]} h \, \mathrm{d}m = \underline{\int_a^b} f$.

24-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ o seu completamento. Se $f : X \to \mathbb{R}$ limitada, então f é $\overline{\mathcal{M}}$-mensurável (e, portanto, pertence a $\mathrm{L}^1(\overline{\mu})$) **see** existirem sequências (ϕ_n) e (ψ_n) de funções simples $\mathcal{M}$-mensuráveis tais que $(\forall n) \phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ e $\int (\psi_n - \phi_n) < n^{-1}$. Neste caso, $\lim \int \phi_n \, \mathrm{d}\mu = \lim \int \psi_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\overline{\mu}$.

25-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{-1/2}$ se $0 < x < 1$ e $f(x) = 0$ caso contrário. Seja $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração dos racionais e $g(x) \doteq \sum_1^\infty 2^{-n} f(x - r_n)$.

(a) $g \in \mathrm{L}^1(m)$ e, em particular, $g < \infty$ q.s.

(b) g é descontínua em todo ponto e ilimitada em todo intervalo.

26-) Se $f \in \mathrm{L}^1(m)$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $F(x) \doteq \int_{-\infty}^x f(t) \, \mathrm{d}t$, então F é contínua.

29-) (i) Mostre que $\int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = n!$ diferenciando a identidade $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}x = 1/t$.
(ii) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x^{2n} \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = (2n)! \sqrt{\pi} / 4^n n!$ diferenciando a identidade $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-tx^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi / t}$.

30-) Mostre que $\lim_{k \to \infty} \int_0^k x^n (1 - k^{-1} x)^k \, \mathrm{d}x = n!$.

31-) Expanda o integrando numa série e justifique a integração termo a termo para obter as seguintes fórmulas (o exercício 29 pode ser útil):

(a) Para $a > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-a^2/4}$.

(b) Para $a > -1$, $\int_0^1 x^a (1-x)^{-1} \log x \, \mathrm{d}x = -\sum_1^\infty (a+k)^{-2}$.

(c) Para $a > 1$, $\int_0^\infty x^{a-1} (\mathrm{e}^x - 1)^{-1} \, \mathrm{d}x = \Gamma(a)\zeta(a)$, onde $\zeta(a) = \sum_1^\infty n^{-a}$.

(d) Para $a > 1$, $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} x^{-1} \sin x \, \mathrm{d}x = \arctan(a^{-1})$.