

## MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 5 - 22/03/2012

- Questão 1-** (i) Defina  $\text{sgn} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\text{sgn}(z) = z/|z|$  se  $z \neq 0$  e  $\text{sgn}(0) = 0$ , de modo que  $(\forall z \in \mathbb{C}) z = \text{sgn}(z) \cdot |z|$ . Então  $\text{sgn}$  é mensurável.
- (ii) Sejam  $(X, \mathcal{M})$  espaço mensurável e  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Então  $f = \text{sgn}(f) \cdot |f|$  (esta é a *decomposição polar* de  $f$ );  $f$  é mensurável *see*  $\text{sgn}(f)$  e  $|f|$  o forem.

**Questão 2-** Demonstre as proposições 2.11 e 2.12.

**Questão 3-** (prop. 2.16, cor. 2.17 e prop. 2.20) Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  espaço de medida.

- (i) Se  $f \in L^+$ , então  $\int f = 0$  *see*  $f = 0$  a.e.
- (ii) Se  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec L^+$  e  $f_n \nearrow f$  a.e., então  $\int f_n \rightarrow \int f$ .
- (iii) Se  $f \in L^+$  e  $\int f < \infty$ , então  $\{x \in X : f(x) = \infty\}$  é um conjunto nulo e  $\{x \in X : f(x) > 0\}$  é  $\sigma$ -finito.

**Questão 4-** Sejam  $(X, \mathcal{M} = 2^X, \mu)$ , onde  $\mu$  é a medida de contagem, e  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ . Então  $f \in L^+$  e  $\int f = \sum_X f$ . Portanto,  $f$  é integrável com respeito à medida de contagem *see*  $f$  for somável (no sentido da lista 0).

### 1 Seção 2.2

- 13-) Seja  $(f_n) \prec L^+$ ,  $f_n \rightarrow f$  pontualmente e  $\int f = \lim \int f_n < \infty$ . Então  $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f = \lim \int_E f_n$ . Isto não ocorre, em geral, se  $\int f = \lim \int f_n = \infty$ .
- 14-) Sejam  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  espaço de medida,  $f \in L^+$ , e  $(\forall E \in \mathcal{M}) \lambda(E) \doteq \int_E f d\mu$ . Então  $\lambda$  é uma medida em  $\mathcal{M}$  e, para toda  $g \in L^+$ ,  $\int g d\lambda = \int gf d\mu$ .
- 15-) Seja  $(f_n) \prec L^+$  tal que  $f_n \searrow f$  pontualmente e  $\int f_1 < \infty$ . Então  $\int f = \lim \int f_n$ .
- 16-) Se  $f \in L^+$  e  $\int f < \infty$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe  $E \in \mathcal{M}$  tal que  $\mu(E) < \infty$  e  $\int_E f > (\int f) - \epsilon$ .
- 17-) Assuma o lema de Fatou e demonstre a partir do mesmo o teorema da convergência monótona.