

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 4 - 20/03/2012

1 Seção 2.1

2-) Sejam $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis.

(a) fg é mensurável (onde $0 \cdot (\pm\infty) \doteq 0$).

(b) Fixe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e defina $h(x) = a$ se $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$ caso contrário. Então h é mensurável.

3-) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis em X . Então $\{x \in X : \exists \lim f_n(x)\}$ é mensurável.

4-) Se $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $(\forall r \in \mathbb{Q}) f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$, então f é mensurável.

5-) Se $X = A \cup B$, com $A, B \in \mathcal{M}$, uma função f em X é mensurável **se e** $f|_A$ e $f|_B$ forem mensuráveis.

6-) O supremo de uma família não enumerável de funções mensuráveis $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pode não ser mensurável.

7-) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $(E_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} \prec \mathcal{M}$ tal que $E_\alpha \subset E_\beta$ sempre que $\alpha < \beta$ e $\cup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = X$ e $\cap_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \emptyset$. Então existe uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \alpha$ em E_α e $f(x) \geq \alpha$ em E_α^c .

8-) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.

11-) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x, \cdot)$ é Borel-mensurável e $(\forall y \in \mathbb{R}) f(\cdot, y)$ é contínua. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ como segue. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, ponha $a_i \doteq i/n$ e, para $a_i \leq x \leq a_{i+1}$:

$$f_n(x, y) \doteq \frac{f(a_i, y) \cdot (x - a_i) + f(a_{i+1}, y) \cdot (a_{i+1} - x)}{a_{i+1} - a_i}$$

Então $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n$ é Borel-mensurável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e $f_n \rightarrow f$ pontualmente. Portanto, f é Borel-mensurável. Conclua, por indução em k , que toda função $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ separadamente contínua em cada variável é Borel-mensurável.