

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 3 - 15/03/2012

DEFINIÇÃO 1 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto se diz um G_δ se for uma intersecção enumerável de abertos. Um conjunto se diz um F_σ se for uma união enumerável de fechados.*

Questão 1-) (teorema 1.18) Sejam $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes e $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ a medida exterior por ela induzida.

- (i) $\forall E \subset \mathbb{R}, \mu^* E = \inf\{\mu(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ aberto e } E \subset \mathcal{U}\}.$
- (ii) $\forall E \subset \mathbb{R}, \exists V \subset \mathbb{R} \text{ um } G_\delta \text{ tal que } E \subset V \text{ e } \mu^*(E) = \mu(V).$
- (iii) $\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto e } K \subset E\}.$
- (iv) $\forall E \in \mathcal{M}, \exists F \subset \mathbb{R} \text{ um } F_\sigma \text{ tal que } F \subset E \text{ e } \mu(E) = \mu(F).$

Questão 2-) (teorema 1.19) Sejam $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes e $E \subset \mathbb{R}$. São equivalentes:

- (i) $E \in \mathcal{M}.$
- (ii) $\forall \epsilon > 0, \exists \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \text{ aberto tal que } E \subset \mathcal{U} \text{ e } \mu(\mathcal{U} \setminus E) < \epsilon.$
- (iii) $E = V \setminus N$, onde $V \subset \mathbb{R}$ é um G_δ e $\mu(N) = 0.$
- (iv) $\forall \epsilon > 0, \exists F \subset \mathbb{R} \text{ fechado tal que } F \subset E \text{ e } \mu(E \setminus F) < \epsilon.$
- (v) $E = H \cup N$, onde $H \subset \mathbb{R}$ é um F_σ e $\mu(N) = 0.$

DEFINIÇÃO 2 *Dados $E \subset \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$, $E + r \doteq \{x + r : x \in E\}$ e $rE \doteq \{rx : x \in E\}.$*

Questão 3-) (teorema 1.21) Seja $m : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ a medida de Lebesgue (i.e. a medida de Lebesgue-Stieltjes induzida pela identidade). Se $E \in \mathcal{L}$, então, $\forall r \in \mathbb{R}$:

- (i) $E + r \in \mathcal{L}$ e $m(E + r) = m(E);$
- (ii) $rE \in \mathcal{L}$ e $m(rE) = |r|m(E).$

1 Seção 1.5

26-) Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ espaço de medida de Lebesgue-Stieltjes e $E \in \mathcal{M}_\mu$ tal que $\mu(E) < \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $A \subset \mathbb{R}$ reunião finita disjunta de intervalos abertos tal que $\mu(E \Delta A) < \epsilon$.

28-) Seja μ_F a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua pela direita. Então: $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$, $\mu_F([a, b)) = F(b-) - F(a-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-)$ e $\mu_F((a, b)) = F(b-) - F(a)$.