MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012
Prof. Gláucio Terra

Lista 20 - 05/06/2012

Questão 1-) Sejam $\mu, \nu \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$. Defina $\mu \times \nu \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ por

$$\mathrm{d}(\mu \times \nu)(x,y) \doteq \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}|\mu|}(x)\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}|\nu|}(y)\,\mathrm{d}(|\mu| \times |\nu|)(x,y),$$

e $\mu * \nu \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$ por $(\forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})\mu * \nu(E) \doteq \mu \times \nu\big(\alpha^{-1}(E)\big)$, onde $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a adição, i.e. $(x,y) \mapsto x + y$. $\mu * \nu$ chama-se *convolução* de μ e ν. Mostre que:

(a) $(\forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, $\mu * \nu(E) = \iint \chi_E(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)$.

(b) a convolução de medidas de Radon é comutativa e associativa.

(c) para toda função boreliana limitada h, $\int h\ \mathrm{d}(\mu * \nu) = \iint h(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)$.

(d) $\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\|\|\nu\|$.

(e) Se m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, $f, g \in \mathrm{L}^1(m)$, $\mu = f\,\mathrm{d}m$ e $\nu = g\,\mathrm{d}m$, então $\mathrm{d}(\mu * \nu) = (f * g)\,\mathrm{d}m$.

1 Seção 7.3

16-) Sejam X LCH, $I \in \mathrm{C}_0(X, \mathbb{R})^*$, I^+ e I^- os funcionais positivos construídos na demonstração do lema 7.15. Se μ é a medida de Radon com sinal induzida por I, então as variações positiva e negativa de μ são as medidas de Radon induzidas, respectivamente, por I^+ e I^-.

18-) Sejam μ uma medida de Radon positiva, σ-finita, num espaço LCH X, e $\nu \in \mathrm{M}(X)$. Seja $\nu = \nu_1 + \nu_2$, com $\nu_1 \perp \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, a decomposição de Lebesgue de ν com respeito a μ. Mostre que ν_1 e ν_2 são medidas de Radon.

22-) [se nunca estudou Análise Funcional, pode pular este exercício] Uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathrm{C}_0(X)$ converge fracamente para $f \in \mathrm{C}_0(X)$ se, e somente se, $\sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ e $f_n \to f$ pontualmente.