

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 19 - 31/05/2012

Questão 1-) Demonstre as proposições 7.11 a 7.14.

1 Seção 7.2

7-) Seja μ uma medida de Radon σ -finita num espaço LCH X . Para todo $A \in \mathcal{B}_X$, $\mu \ll A$ (i.e. a medida dada por $E \mapsto \mu(E \cap A)$) é uma medida de Radon. OBSERVAÇÃO. É suficiente μ medida de Radon em X e $A \in \mathcal{B}_X$ σ -finito.

8-) Sejam μ uma medida de Radon num espaço LCH X e $\phi \in L^1(\mu)$, $\phi \geq 0$. Então $\nu \doteq \phi d\mu$ é uma medida de Radon.

9-) Sejam μ uma medida de Radon num espaço LCH X , $\phi \in C(X, (0, \infty))$ e $\nu \doteq \phi d\mu$. Seja ν' a medida de Radon associada, pelo teorema de representação de Riesz, ao funcional linear positivo em $C_c(X)$ dado por $I = \int \cdot d\nu$.

(a) Se $\mathcal{U} \subset X$ aberto, $\nu(\mathcal{U}) = \nu'(\mathcal{U})$. SUGESTÃO: Aplique o corolário 7.13 a $\phi \chi_{\mathcal{U}}$.

(b) ν é exteriormente regular. SUGESTÃO: Os abertos $\{x : 2^k < x < 2^{k+2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, cobrem X .

(c) $\nu = \nu'$ (portanto, ν é medida de Radon).

10-) Sejam μ uma medida de Radon num espaço LCH X e $f \in L^1(\mu)$ a valores reais. Para todo $\epsilon > 0$, existem g SCI e h SCS tais que $h \leq f \leq g$ e $\int (g - h) d\mu < \epsilon$.

11-) Seja μ uma medida de Radon num espaço LCH X tal que, para todo $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$. Para todo $A \in \mathcal{B}_X$ tal que $0 < \mu(A) < \infty$ e para todo $0 < \alpha < \mu(A)$, existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $B \subset A$ e $\mu(B) = \alpha$.