MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012
Prof. Gláucio Terra

Lista 16 - 22/05/2012

Questão 1-) Seja X um espaço normado. Então X é completo *see* toda série absolutamente convergente em X é convergente.

Questão 2-) Demonstre as proposições 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12.

1 Seção 6.1

1-) Quando vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky? (a resposta é diferente se $p = 1$ e $1 < p < \infty$).

2-) Demonstre o teorema 6.8:

(a) Se f e g forem funções mensuráveis em X, então $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Se $f \in \mathrm{L}^1$ e $g \in \mathrm{L}^\infty$, então $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ *see* $|g(x)| = \|g\|_\infty$ q.s. no conjunto onde $f(x) \neq 0$.

(b) $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em L^∞.

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *see* $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente em E.

(d) L^∞ é um espaço de Banach.

(e) As funções simples são densas em L^∞.

3-) Se $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$, $\mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^r$ é um espaço de Banach com norma $\|f\| \doteq \|f\|_p + \|f\|_r$. Além disso, se $p < q < r$, a inclusão $\mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^r \to \mathrm{L}^q$ é contínua.

7-) Se $f \in \mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^\infty$ para algum $p < \infty$, de modo que $f \in \mathrm{L}^q$ para todo $q > p$, então $\|f\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|f\|_q$.

8-) Suponha $\mu(X) = 1$ e $f \in \mathrm{L}^p$ para algum $p > 0$, de modo que $f \in \mathrm{L}^q$ para $0 < q < p$.

(a) $\log\|f\|_q \geqslant \int \log|f|$. Sugestão: Use a desigualdade de Jensen com $F = \exp$.

(b) $(\int |f|^q - 1)/q \geqslant \log\|f\|_q$, e $\lim_{q\to 0}(\int |f|^q - 1)/q = \int \log|f|$.

(c) $\lim_{q\to 0}\|f\|_q = \exp(\int \log|f|)$.

9-) Seja $1 \leqslant p < \infty$. Se $\|f_n - f\|_p \to 0$, então $f_n \to f$ em medida, portanto alguma subsequência de $(f_n)_n$ converge para f q.s. Por outro lado, se $f_n \to f$ em medida e $(\forall n \in \mathbb{N})\, |f_n| \leqslant g \in \mathrm{L}^p$, então $\|f_n - f\|_p \to 0$.

10-) Seja $1 \leqslant p < \infty$. Se $f_n, f \in \mathrm{L}^p$ e $f_n \to f$ q.s., então $\|f_n - f\|_p \to 0$ *see* $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

11-) Seja f uma função mensurável em X. Defina a *imagem essencial* R_f de f por $R_f \doteq \{z \in \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \mu\{x \in X : |f(x) - z| < \epsilon\} > 0\}$.

(a) R_f é fechado.

(b) Se $f \in \mathrm{L}^\infty$, R_f é compacto e $\|f\|_\infty = \max\{|z| : z \in R_f\}$.

11 - complemento-) Com a notação da questão anterior, mostre que:

(a) $\mathrm{L}^\infty(X)$ é uma álgebra de Banach com unidade (a multiplicação é induzida pelo produto de funções induzido pelo produto de $\mathbb{C}$ e a unidade é a classe de equivalência da função constante e igual a 1).

(b) $f \in \mathrm{L}^\infty$ é inversível ***see*** $0 \notin R_f$.

13-) $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, m)$ é separável para $1 \leqslant p < \infty$. Todavia, $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ não é separável (mostre que existe um conjunto não-enumerável $\mathcal{F} \subset \mathrm{L}^\infty$ tal que $(\forall f \neq g \in \mathcal{F})\ \|f - g\|_\infty \geqslant 1$).

14-) Se $g \in \mathrm{L}^\infty$, o operador $T : \mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p$ definido por $f \mapsto fg$ é limitado em L^p para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Além disso, $\|T\| \leqslant \|g\|_\infty$, valendo a igualdade se μ for semi-finita.