MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012
Prof. Gláucio Terra

Lista 12 - 08/05/2012

1 Seção 3.3

18-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $f \in \mathrm{L}^1(\nu)$. Então $\mathrm{L}^1(\nu) = \mathrm{L}^1(|\nu|)$ e $|\int f \, \mathrm{d}\nu| \leqslant \int |f| \, \mathrm{d}|\nu|$.

19-) Se ν, μ são medidas complexas e λ é uma medida positiva, então $\nu \perp \mu$ *see* $|\nu| \perp |\mu|$, e $\nu \ll \lambda$ *see* $|\nu| \ll \lambda$.

20-) Se ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $\nu(X) = |\nu|(X)$, então $\nu = |\nu|$.

21-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$. Defina:

$$\mu_1(E) \doteq \sup\{\sum_1^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, (E_j)_1^n \prec \mathcal{M}, E = \cup_1^n E_j\}$$
$$\mu_2(E) \doteq \sup\{\sum_1^\infty |\nu(E_j)| : (E_j)_1^\infty \prec \mathcal{M}, E = \cup_1^\infty E_j\}$$
$$\mu_3(E) \doteq \sup\{|\int_E f \, \mathrm{d}\nu| : f \in \mathrm{L}^1(\nu), |f| \leqslant 1\}.$$

Então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$. Sugestão: Mostre que $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3$. Para verificar que $\mu_3 = |\nu|$, tome $f \doteq \overline{\mathrm{d}\nu / \mathrm{d}|\nu|}$. Para verificar que $\mu_3 \leqslant \mu_1$, aproxime f por funções simples.