

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 10 - 24/04/2012

1 Seção 2.7

62-) A medida σ em S^{n-1} é invariante por rotações.

63-) (INTEGRAIS DE POLINÔMIOS EM S^{n-1}). A técnica usada para se calcular $\sigma(S^{n-1})$ pode ser aplicada para se calcular integrais de polinômios em S^{n-1} . Por exemplo, seja $f(x) = \prod_1^n x_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então $\int f d\sigma = 0$ se algum dos α_j for ímpar; se todos os α_j forem pares, tem-se:

$$\int f d\sigma = \frac{2\Gamma(\beta_1) \cdots \Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1 + \cdots + \beta_n)}, \text{ onde } \beta_j \doteq \frac{\alpha_j + 1}{2}.$$

2 Seção 3.1

1-) Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Se $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$ é uma sequência crescente, então $\nu(\cup_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$. Se $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$ é uma sequência decrescente e $\nu(E_1) < \infty$, então $\nu(\cap_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$.

2-) Se ν é uma medida com sinal, $E \in \mathcal{M}$ é ν -nulo *see* $|\nu|(E) = 0$. Além disso, se μ, ν são medidas com sinal, tem-se: $\nu \perp \mu$ *see* $|\nu| \perp \mu$ *see* $\nu^+ \perp \mu$ e $\nu^- \perp \mu$.

3-) Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Tem-se:

(a) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$.

(b) Se $f \in L^1(\nu)$, então $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$.

(c) Se $|\nu|$ for semi-finita, então, para todo $E \in \mathcal{M}$, $|\nu|(E) = \sup\{|\int f d\nu| : f \in L^1(\nu) \text{ e } |f| \leq 1\}$.

4-) Se ν é uma medida com sinal e λ, μ são medidas positivas tais que $\nu = \lambda - \mu$, então $\lambda \geq \nu^+$ e $\mu \geq \nu^-$.

5-) Sejam ν_1 e ν_2 medidas com sinal. Suponha que ambas omitam o valor $+\infty$ ou o valor $-\infty$. Então $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$.

6-) Seja $\nu(E) \doteq \int_E f d\mu$, onde μ é uma medida positiva e f é μ -quase integrável. Descreva as decomposições de Hahn de ν e as variações positiva, negativa e total de ν em termos de f e μ .

7-) Sejam ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$.

(a) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$ e $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$.

(b) $|\nu|(E) = \sup\{|\sum_1^n \nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, (E_j)_1^n \prec \mathcal{M} \text{ e } \cup_1^n E_j = E\}$.