

MAT5798 - Medida e Integração - IME - 2012

Prof. Gláucio Terra

Lista 1 - 08/03/2012

1 Exercícios propostos em aula e outros:

Questão 1-) Proposições 1.2 a 1.7 do Folland.

Questão 2-) (generalização da prop. 1.5) Sejam $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e $X = \prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. Então $\otimes_{i \in I} \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$; vale a igualdade se X tiver base enumerável de abertos (o que é equivalente a cada X_i ter base enumerável e ser enumerável o conjunto dos $i \in I$ tal que X_i tem mais que um ponto). Como corolário, conclua que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Questão 3-) Sejam X um conjunto, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ e $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\mu(E) \doteq \sum_E f$. Então:

- (i) μ é uma medida em $(X, \mathcal{P}(X))$.
- (ii) μ é semi-finita *see* $(\forall x \in X) f(x) < \infty$.
- (iii) μ é σ -finita *see* for semi-finita e f se anular fora de um conjunto enumerável.

Questão 4-) Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$.

- (i) Existe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ tal que $(\forall 1 \leq k \leq \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.
- (ii) Existe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente tal que $(\forall 1 \leq k \leq \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.

Questão 5-) (teorema 1.8 - propriedades das medidas) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Valem as seguintes propriedades:

- i) **monotonicidade:** Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.
- ii) **subaditividade enumerável:** Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, então $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$.
- iii) **continuidade inferior:** Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ crescente, então $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim \mu(E_n)$.
- iv) **continuidade superior:** Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ decrescente e $\mu(E_1) < \infty$, então $\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim \mu(E_n)$. Apresente um contra-exemplo sem a hipótese $\mu(E_1) < \infty$.

DEFINIÇÃO 1 *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Diz-se que $E \subset \mathcal{M}$ é nulo se $\mu(E) = 0$. Diz-se que μ é completa se todo subconjunto de um conjunto nulo for mensurável.*

Questão 6-) (teorema 1.9 - complemento de um espaço de medida) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{N} \doteq \{N \in \mathcal{M} : \mu(E) = 0\}$. Defina $\overline{\mathcal{M}} \doteq \{E \cup F : E \in \mathcal{M} \text{ e } F \subset N, N \in \mathcal{N}\}$. Então $\overline{\mathcal{M}}$ é uma σ -álgebra em X e existe uma única extensão $\bar{\mu}$ de μ a uma medida completa em $\overline{\mathcal{M}}$.

2 Exercícios do Folland

2.1 Seção 1.2

1-) Uma classe de conjuntos $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(X)$ chama-se *anel* se for fechada por uniões finitas e diferenças (i.e. se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R}$ então $\cup_1^n E_i \in \mathcal{R}$ e se $E, F \in \mathcal{R}$ então $E - F \in \mathcal{R}$). Um anel fechado por uniões enumeráveis chama-se σ -*anel*.

- (a) Anéis (resp. σ -anéis) são fechados por intersecções finitas (resp. enumeráveis).
- (b) Se $\mathcal{R}$ for um anel (resp. σ -anel), então $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp. σ -álgebra) *see* $X \in \mathcal{R}$.
- (c) Se $\mathcal{R}$ for um σ -anel, então $\{E \subset X : E \in \mathcal{R} \text{ ou } E^c \in \mathcal{R}\}$ é uma σ -álgebra.
- (d) Se $\mathcal{R}$ for um σ -anel, então $\{E \subset X : \forall F \in \mathcal{R}, E \cap F \in \mathcal{R}\}$ é uma σ -álgebra.

3-) Seja $\mathcal{M}$ uma σ -álgebra infinita.

- (a) $\mathcal{M}$ contém uma sequência infinita de conjuntos disjuntos.
- (b) $\text{card}(\mathcal{M}) \geq \mathfrak{c}$.

4-) Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra *see* for fechada por uniões enumeráveis crescentes (i.e. se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ for uma família crescente, então $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$).

5-) Se $\mathcal{M}$ é a σ -álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $\mathcal{M}$ é a união das σ -álgebras $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ geradas pelos subconjuntos enumeráveis $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$.

2.2 Seção 1.3

7-) Se $\mu_1, \dots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{i=1}^n \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$. Isto vale para famílias arbitrárias $(\mu_i)_{i \in I}$ de medidas e $(a_i)_{i \in I} \prec [0, \infty)$, i.e. $\mu \doteq \sum_{i \in I} a_i \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$?

8-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$. Então $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu E_n$. Além disso, se $\mu(\cup_1^\infty E_n) < \infty$, então $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu E_n$.

9-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$. Então $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$.

10-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina $(\forall A \in \mathcal{M}) \mu \sqcup E(A) \doteq \mu(E \cap A)$. Então $\mu \sqcup E$ é uma medida.

11-) Uma *medida finitamente aditiva* μ em $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e, para toda $(E_n)_1^k \prec \mathcal{M}$, $\mu(\cup_1^k E_n) = \sum_1^k \mu(E_n)$. Verifique que uma medida finitamente aditiva μ em $(X, \mathcal{M})$ é uma medida *see* μ é contínua inferiormente. Se $\mu(X) < \infty$, esta condição também é equivalente a ser μ contínua superiormente.

12-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finito.

- (a) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $\mu(E \Delta F) = 0$, então $\mu(E) = \mu(F)$.
- (b) Defina $E \sim F$ se $\mu(E \Delta F) = 0$. Então μ é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$.
- (c) Defina $\rho(E, F) \doteq \mu(E \Delta F)$. Então $\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G)$, de modo que ρ define uma métrica no quociente $\mathcal{M}/\sim$.

13-) Toda medida σ -finita é semi-finita.

14-) Sejam μ uma medida semi-finita e E mensurável tal que $\mu(E) = \infty$. Então, para todo $C > 0$, existe $F \subset E$ mensurável tal que $C < \mu(F) < \infty$.

15-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Defina μ_0 em $\mathcal{M}$ por $\mu_0(E) \doteq \sup\{\mu(F) : F \subset E \text{ mensurável e } \mu(F) < \infty\}$.

- (a) μ_0 é uma medida semi-finita. Chama-se *parte semi-finita* de μ .
- (b) Se μ é semi-finita, então $\mu = \mu_0$.
- (c) Existe uma medida ν em $\mathcal{M}$ (em geral, não é única) que assume apenas valores 0 e ∞ tal que $\mu = \mu_0 + \nu$.

16-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ diz-se *localmente mensurável* se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\mathcal{M}_{loc}$ o coleção de todos os subconjuntos localmente mensuráveis de X . Então $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{loc}$. Se $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{M}$, diz-se que μ é *saturada*.

- (a) Se μ for σ -finita, então μ é saturada.
- (b) $\mathcal{M}_{loc}$ é uma σ -álgebra.
- (c) Defina ν em $\mathcal{M}_{loc}$ por $\nu(E) \doteq \mu(E)$ se $E \in \mathcal{M}$ e $\nu(E) \doteq \infty$ caso contrário. Então ν é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$, chamada *saturação* de μ .
- (d) Se μ for completa, ν também o é.
- (e) Suponha que μ seja semi-finita. Dado $E \in \mathcal{M}_{loc}$, defina $\nu_0(E) \doteq \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M} \text{ e } A \subset E\}$. Então ν_1 é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$ que estende μ .
- (f) Sejam X_1, X_2 conjuntos disjuntos enumeráveis e $X = X_1 \cup X_2$. Sejam $\mathcal{M}$ a σ -álgebra dos conjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis em X e μ_0 a medida de contagem em $\mathcal{P}(X_1)$. Defina μ em $\mathcal{M}$ por $\mu(E) \doteq \mu_0(E \cap X_1)$. Então μ é uma medida em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{P}(X)$ e, com a notação dos itens anteriores, $\nu \neq \nu_0$.