

Notas sobre o conjunto ternário e Cantor

1.) $\forall x \in [0, 1]$ x admite uma representação na base 3:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 3^{-n}, \quad x_n \in \{0, 1, 2\}$$

$x=0$ é trivial; suponha $x > 0$.

Dem.: $(\forall n \in \mathbb{N}) \exists! k_n \in \{1, \dots, 3^n\}$ tal que $x \in \left[\frac{k_n-1}{3^n}, \frac{k_n}{3^n}\right]$.

Seja $a_n = \frac{k_n-1}{3^n}$. Segue-se do teorema do intervalo encaixado

tal que $a_n \nearrow x$. Portanto, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$$= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) = \frac{k_1-1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k_n - 3k_{n-1} + 2}{3^n},$$

onde $x_1 \in \{0, 1, 2\}$ (pois $k_1 \in \{1, \dots, 3\}$) e, $\forall n \geq 2$:

$$\left[\frac{k_{n-1}-1}{3^{n-1}}, \frac{k_{n-1}}{3^{n-1}}\right] \subset \left[\frac{k_n-1}{3^n}, \frac{k_n}{3^n}\right], \text{ donde:}$$

$$0 \leq \underbrace{\frac{k_n-1}{3^n} - \frac{k_{n-1}-1}{3^{n-1}}}_{= \frac{x_n}{3^n}} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \Leftrightarrow x_n \in \{0, 1, 2\}.$$

2.) Def.: Dado $x \in [0, 1]$, a representação

$$x = 0.x_1x_2 \dots x_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 3^{-n}$$

dit-se infinita ou eventualmente nula se $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists K \geq n$ tal que $x_K \neq 0$. Caso contrário, dit-se que a representação é finita.

Toda $x \in [0, 1]$ admite uma única representação na base 3 infinita; além disso x admite uma representação finita se e só se $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists K \in \{1, \dots, 3^n-1\} / x = K \cdot 3^{-n}$.

Dem.: (i) Se $x \in [0, 1]$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 3^{-n} = (\sum_{n=1}^p x_n \cdot 3^{-n}) / 3^p$, então $x < \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} = 1$ e, portanto, $\sum_{n=1}^p x_n \cdot 3^{-n} < 3^p$. Por outro lado, se $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists K \in \{1, \dots, 3^n-1\} / x = K \cdot 3^{-n}$: podemos supor que $3 \nmid K$. Pelo algoritmo da divisão, $\exists! x_1 \in \{1, 2\}$, $\exists! K_1 \in \mathbb{N} /$

K_0

$K = 3K_1 + x_1$. Tem-se $0 \leq K_1 < 3^{n-1}$. Repetindo-se o argumento, obtém-se indutivamente: $(x_i)_1^n, (K_i)_1^n$ tal que $x_i \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq K_i < 3^{n-i}$, para $1 \leq i \leq n$.
 $K_{i-1} = 3K_i + x_i$

$$\text{Então } K_n = 0 \text{ e } K = 3K_1 + x_1 = 3^2 K_2 + 3x_2 + x_1 = \dots = 3^{n-1} x_n + \dots + 3x_2 + x_1$$

onde $K \cdot 3^n = x_n \cdot 3^2 + x_{n-2} \cdot 3^2 + \dots + x_1 \cdot 3^n$, portanto está demonstrada a afirmação sobre a representação finita.

(ii) Se $x \in]0, 1[$ admite uma representação finita, i.e.

$x = \sum_{n=1}^p x_n \cdot 3^{-n}$, então x também admite uma representação infinita, pois, SPC $x_p \neq 0$, logo:

$$x = \sum_{n=1}^{p-1} x_n \cdot 3^{-n} + (x_p - 1) \cdot 3^{-p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n}$$

Assim, todo $x \in]0, 1[$ admite representação infinita.

(iii) Duas representações infinitas de $x \in]0, 1[$ coincidem. Com efeito, suponha $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \cdot 3^{-n}$, ambas infinitas. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha, como hipótese $n=1$ indutiva, $x_p = x'_p$ para todo $p \in \mathbb{N} / p < n$. Suponha, por absurdo, $x_n - x'_n \geq 1$. Tem-se:

$$(4) \quad 0 = \sum_{p=n}^{\infty} (x_p - x'_p) \cdot 3^{-p} = (x_n - x'_n) \cdot 3^{-n} + \sum_{p=n+1}^{\infty} (x_p - x'_p) \cdot 3^{-p}$$

$$\text{Como } \left| \sum_{p=n+1}^{\infty} (x_p - x'_p) \cdot 3^{-p} \right| < \sum_{p=n+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-p} = 2 \cdot 3^{-(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3^{-n}$$

aqui usamos o fato de termos as representações infinitas, c.c. poderia ser $\leq$

e como $(x_n - x'_n) \cdot 3^{-n} \geq 3^{-n}$, (4) não pode ocorrer, o que é uma contradição. Então $x_n = x'_n$, por indução, isso vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Se $x \in [0,1]$ admitir expansão finita, seja a_k o maior dígito não nulo numa tal expansão. Se $a_k = 0$ ou 2 , não faça nada; se $a_k = 1$, escolha a expansão infinita, i.e.

$$x = 0.a_1 \dots a_{k-1} 0222 \dots$$

Chamemos as expansões assim escolhidas de normalizadas; todo $x \in [0,1]$ possui uma única expansão normalizada.

4) Proposição: O conjunto ternário de Cantor, C , é o conjunto $\{x \in [0,1] / \text{na expansão normalizada de } x \text{ não aparece o dígito } 1\}$.

Lema: Seja $\{I_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $T_n \equiv$ união dos intervalos que labram na n -ésima etapa da construção de C . Então

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{T_0} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \quad \left(\forall n \in \mathbb{N} \right) T_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} T_{n,k} \\ \left[\begin{array}{cc} 1/3 & 2/3 \end{array} \right] &\xrightarrow{T_1} T_1 \quad \text{onde } T_{n,k} = [a_k^n, b_k^n], \quad 1 \leq k \leq 2^n, \\ &\quad \text{as } a_k^n \text{ são o conjunto das somas} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1/9 & 2/9 & 7/9 \end{array} \right] &\xrightarrow{T_2} T_2 \quad \text{de } \sum_{j=1}^n a_{k_j}^n \cdot 3^{-j}, \quad a_{k_j}^n \in \{0, 2\} \\ &\quad \text{e } b_k^n = a_k^n + 3^{-n}. \end{aligned}$$

Prov.: (i) Para $n=1$: $a_1^1 = 0$, $a_2^1 = 2 \cdot 3^{-1}$.

(ii) Suponha que, dado $n \in \mathbb{N}$, T_n seja como acima. Então as a_k^{n+1} se obtém pela divisão de $[a_k^n, b_k^n]$ em três partes; se $a_k^n = \sum_{j=1}^n a_{k_j}^n \cdot 3^{-j}$, temos:

$$a_k^{n+1} = a_k^n \quad \text{e} \quad a_{k'}^{n+1} = \sum_{j=1}^n a_{k_j}^n \cdot 3^{-j} + 2 \cdot 3^{-(n+1)}$$

e ordenamos estes números, os quais serão os a_k^{n+1} .

Prov. da prop.: pelo lema $(\forall n \in \mathbb{N}) T_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} T_{n,k}$, onde $T_{n,k} = [a_k^n, b_k^n]$, $1 \leq k \leq 2^n$, sendo as expansões normalizadas dos extremos dos intervalos da forma:

$$a_k^n = 0.a_{k1}^n a_{k2}^n \dots a_{kn}^n 000 \dots$$

$$b_k^n = 0.a_{k1}^n a_{k2}^n \dots a_{kn}^n 222 \dots \text{ com } a_{kj}^n \in \{0, 2\}$$

Assim, $x \in [a_k^n, b_k^n] \Leftrightarrow$ os n primeiros dígitos da expansão normalizada de x são $a_{k1}^n, \dots, a_{kn}^n$. Disto se conclui que $x \in T_n \Leftrightarrow$ os n primeiros dígitos da expansão normalizada de x são 0 ou 2; portanto, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n \Leftrightarrow$ todos os dígitos da expansão normalizada de x são 0 ou 2. $\neq$

5.) Seja $f: C \rightarrow [0, 1]$

$$x = \underbrace{0.a_1 a_2 \dots}_{\text{expansão normalizada de } x} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \cdot 2^{-n}$$

Segue-se de (i) que f está bem definido e é sobrejetiva; logo, $\text{card}(C) = \mathbb{R}$. Claramente, f é crescente.

Além disso, com a notação de (i), os extremos dos intervalos abertos retirados na etapa n são da forma

$$\left(\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj}^n \cdot 3^{-j}}_{\text{parte inteira}}, \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj}^n \cdot 3^{-j} + 2 \cdot 3^{-(n+1)}}_{\text{parte fracionária}} \right)$$

$$(x) \quad 0.a_{k1}^n \dots a_{kn}^n 0222 \dots \quad 0.a_{k1}^n \dots a_{kn}^n 2$$

$$\therefore f \text{ assume o mesmo valor } 0.\frac{a_{k1}^n}{2} \dots \frac{a_{kn}^n}{2} 0111 \dots = 0.\frac{a_{k1}^n}{2} \dots \frac{a_{kn}^n}{2} 1$$

nos extremos de um tal intervalo. Reciprocamente, se $x \neq y$ e $f(x) = f(y)$, então x e y são extremidades de algum intervalo aberto removido alguma etapa, pois x e y devem ter como em (i). (onde n é o maior dígito para o qual as representações normalizadas coincidem nos n primeiros dígitos). E, nesse caso, $f(x) = f(y)$ admite rep. finita.

Defina $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

(i) $F|_C = f$

(ii) Nos extremos dos intervalos abertos que foram removidos,

F é constante e igual ao valor assumido por f nos seus extremos.

Então F é crescente e sobrejetiva $\therefore$ contínua.

Def. F chama-se função de Cantor - Lebesgue.

Note que $F' = 0$ m.o.e. $\therefore \mu_F \perp m$
Segue-se $\mu_F \not\ll m$ $\therefore F$ não é absolutamente contínua.