MAT5798 – Medida e Integração

Notações e Preliminares

I.) Linguagem da teoria dos conjuntos (Seção 0.1 do Folland).

— x —

II.) A reta estendida (seção 0.5 do Folland):

- $\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- relação de ordem em $\overline{\mathbb{R}}$: $a<b$ se ($a,b \in \mathbb{R}$ e $a<b$) ou ($a=-\infty$ e $b \neq -\infty$) ou ($a \neq +\infty$ e $b=+\infty$).

- a relação de ordem acima é total (i.e. $\forall a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a=b$ ou $a<b$ ou $b<a$) e completa (i.e. todo conjunto não-vazio limitado superiormente admite supremo). Além disso,
  $+\infty$ é limitante superior de qualquer conjunto
  $-\infty$ " " inferior " " "

  $\therefore \forall A \subset \overline{\mathbb{R}}$ admite supremo e ínfimo.

- Definimos em $\overline{\mathbb{R}}$ a topologia da ordem:
  $\forall a \in \mathbb{R}$, $L_a \doteq \{x \in \overline{\mathbb{R}} / x<a\}$ e $R_a \doteq \{x \in \overline{\mathbb{R}} / x>a\}$
  $S \doteq \{L_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{R_a : a \in \mathbb{R}\}$ é tomada como sub-base p/ a referida topologia. Uma base para a topologia da ordem é:

$$S \cup \{R_a \cap L_b / a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}.$$

- Munido da topologia da ordem, $\overline{\mathbb{R}}$ é um espaço Hausdorff compacto, metrizável; é uma compactificação de $\mathbb{R}$.

- Definimos a adição e a multiplicação em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$+ : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(\pm\infty, \mp\infty)\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

e $$\cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus \{(0, \pm\infty), (\pm\infty, 0)\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

da maneira óbvia. Estas aplicações são contínuas. Por conveniência, definiremos $0 \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot 0 = 0$ (mas a multiplicação não é contínua nestes pontos).

- Seja $\{x_n\}$ uma sequência em $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\overline{\lim}\, x_n \doteq \inf_{k \geq 1} \left(\sup_{n \geq k} x_n\right) = \lim_{k \to \infty} \left(\sup_{n \geq k} x_n\right),$$

e $$\underline{\lim}\, x_n \doteq \sup_{k \geq 1} \left(\inf_{n \geq k} x_n\right) = \lim_{k \to \infty} \left(\inf_{n \geq k} x_n\right)$$

são, respectivamente, o máximo e o mínimo do conjunto $V \doteq \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, x$ é valor de aderência de $\{x_n\}\}$.

$\{x_n\}$ é convergente $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$ e, nesse caso, o valor comum é o limite da sequência.

- Analogamente, dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\lim_{x \to a}}\, f(x) \doteq \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0 < |x-a| < \delta} f(x)\right)$$

e $$\underline{\lim_{x \to a}}\, f(x) \doteq \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0 < |x-a| < \delta} f(x)\right).$$

$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim_{x\to a}} f(x)$ e, em caso afirmativo, o valor comum coincide com o limite de f em a.

— x —

III.) Nets e somabilidade (seção 4.3 do Folland ou capítulo 2 do Kelley).

- Def.: Um <u>conjunto dirigido</u> é um par $(D, \leq)$, onde D é um conjunto e $\leq$ é uma relação binária em D tal que:

(i) $(\forall x \in D)\ x \leq x$

(ii) $(\forall x, y, z \in D)\ x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(iii) $\forall x, y \in D, \exists z \in D \,/\, x \leq z$ e $y \leq z$.

- Def.: Um <u>net</u> $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ num conjunto A é uma aplicação $x: D \to A$ cujo domínio é um conjunto dirigido.

Se $B \subset A$, diz-se que o net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$:

— está <u>eventualmente</u> em B se $\exists \alpha_0 \in D \,/\, (\forall \alpha \geq \alpha_0)\ x_\alpha \in B$

— " <u>frequentemente</u> em B se $\forall \alpha \in D, \exists \beta \geq \alpha \,/\, x_\beta \in B$ (ou seja, se o conjunto $\{\beta \in D \,/\, x_\beta \in B\}$ for <u>cofinal</u> em D).

- Def.: Sejam (X, τ) espaço topológico, $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ um net em X e $x_0 \in X$. Diz-se que:

(i) $(x_\alpha)_\alpha$ converge para x_0 (notação: $x_\alpha \to x_0$)

se $\forall U$ vizinhança de x_0, $(x_\alpha)_\alpha$ está eventualmente em U.

(ii) x_0 é <u>valor de aderência</u> de $(x_\alpha)_\alpha$ se $\forall U$ vit. de x_0, $(x_\alpha)_\alpha$ está frequentemente em U.

- <u>Def.</u>: Diz-se que um net $(y_\beta)_{\beta\in E}$ é um <u>subnet</u> do net $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ se $\exists N : E \to D$ tal que

(i) $y = x \circ N$ (i.e. $\forall \beta \in E$, $y_\beta = x_{N(\beta)}$)

(ii) $\forall \alpha \in D$, $\exists \beta_0 \in E \,/\, \beta \geq \beta_0 \Rightarrow N(\beta) \geq \alpha$.

- <u>Exercícios</u>:

1.) Sejam X esp. topológico, $E \subset X$ e $p \in X$. Então:

(i) $p \in E'$ (i.e. p é pto. de acumulação de E) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists (x_\alpha)_{\alpha\in D}$ net em $E\setminus\{p\} \,/\, x_\alpha \to p$.

(ii) $p \in \overline{E} \Leftrightarrow \exists (x_\alpha)_{\alpha\in D}$ net em $E \,/\, x_\alpha \to p$.

2.) Um espaço topológico X é Hausdorff <u>see</u> todo net $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ em X convergente tem limite único.

3.) Sejam X, Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$. Então f é contínua em x_0 <u>see</u> $\forall (x_\alpha)_{\alpha\in D}$ net em $X \,/\, x_\alpha \to x_0$, $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.

4) Sejam X esp. topológico, $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ net em X e $x_0 \in X$. Então:

(i) se $x_\alpha \to x_0$, todo subnet de $(x_\alpha)_\alpha$ converge para x_0.

(ii) x_0 é valor de aderência de $(x_\alpha)_\alpha$ <u>sse</u> $\exists (y_\beta)_\beta$ subnet de $(x_\alpha)_\alpha$ t.q. $y_\beta \to x_0$.

5) Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$; uma <u>partição pontilhada</u> de $[a,b]$ é um par (P,ξ) tal que $P = (x_j)_0^n$ é uma partição de $[a,b]$ (i.e. $a = x_0 < \dots < x_n = b$) e $\xi = (\xi_j)_1^n$ é um pontilhamento de P, i.e. $(\forall j)\ \xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Defina $\leq$ em $\mathcal{P} \doteq \{(P,\xi) \,/\, (P,\xi) \text{ partição pontilhada de } [a,b]\}$ por $(P,\xi) \leq (Q,\zeta)$ se $P \subset Q$ (i.e. se Q refina P). Então:

(i) $(\mathcal{P}, \leq)$ é um conjunto dirigido

(ii) Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, o net $\{S_{(P,\xi)} f\}_{(P,\xi)\in\mathcal{P}}$ dado por $S_{(P,\xi)} f = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$ é convergente em $\mathbb{R}$ <u>see</u> f for Riemann-integrável; em caso afirmativo, o referido net converge para $\int_a^b f(x)\,dx$.

6) [Nets monótonos] Sejam X um conjunto munido de uma relação de ordem total e completa, τ a topologia da ordem em X e $(s_\alpha)_\alpha$ um net em X.

Diz-se que $\begin{cases} (s_\alpha)_\alpha \text{ é crescente se } \alpha \geq \beta \Rightarrow s_\alpha \geq s_\beta \\ \quad " \quad " \text{ decrescente } " \ \alpha \geq \beta \Rightarrow s_\alpha \leq s_\beta \\ \quad " \quad " \text{ mónotono se for cresc. ou decresc.} \end{cases}$

Mostre que:

Se $(s_\alpha)_{\alpha \in D}$ for um net crescente em X e tiver imagem limitada superiormente, então $(s_\alpha)_\alpha$ converge para $\sup \{s_\alpha : \alpha \in D\}$.

7) [Somabilidade] Sejam f uma função a valores em $(-\infty, +\infty]$ ou $[-\infty, +\infty)$ e $A \subset \operatorname{dom} f$. Seja $\mathcal{a}$ a família de todos os subconjuntos finitos de A, ordenada pela inclusão; para cada $F \in \mathcal{a}$, defina $S_F \doteq \sum_{a \in F} f(a)$. Então $(\mathcal{a}, \subset)$ é um conjunto dirigido e $(S_F)_{F \in \mathcal{a}}$ é um net; diz-se que f é <u>quase-somável</u> em A se o net $(S_F)_{F \in \mathcal{a}}$ for convergente em $\overline{\mathbb{R}}$. Em caso afirmativo, define-se a soma de f em A, $\sum_A f$, como sendo o limite do referido net. Se $\sum_A f \in \mathbb{R}$, f é <u>somável</u> em A.

<u>Obs.</u>: veremos, futuramente, que f é somável em A <u>see</u> f for integrável em A com respeito à medida de contagem.

(a) Se $f \geqslant 0$, então f é quase-somável em A; nesse caso, $\Sigma_A f = \sup\{S_F / F \in \mathcal{Q}\}$, de modo que f é somável em A <u>see</u> o conjunto das somas de f em subconjuntos finitos de A <u>admitir</u> uma cota superior finita.

— x —

(b) Sejam $f, g : A \to (-\infty, +\infty]$ ou $f, g : A \to [-\infty, +\infty)$ quase-somáveis, com uma delas somável, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então $\alpha f + \beta g$ é quase-somável e $\Sigma_A(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \Sigma_A f + \beta \cdot \Sigma_A g$. O mesmo vale se $\Sigma_A f = \infty = \Sigma_A g$ ou $\Sigma_A f = -\infty = \Sigma_A g$ e $\alpha \cdot \beta \geqslant 0$.

— x —

(c) Sejam $(\forall x \in \operatorname{dom} f)$ $f_+(x) \doteq \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$ e

$f_-(x) \doteq \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geqslant 0 \end{cases}$, de modo que $f = f_+ - f_-$,

$f_+ \geqslant 0$ e $f_- \geqslant 0$. Então:

(i) f é quase-somável em A <u>see</u> $\Sigma_A f_+ < +\infty$ ou $\Sigma_A f_- < +\infty$.

(ii) f é somável em A <u>see</u> f_+ e f_- o forem <u>see</u> $|f|$ o for.

— x —

(d) Se f for somável em A, então f se anula fora de algum subconjunto enumerável de A.

(e) Se f é quase-somável em $A = B \dot\cup C$, também o é em B e em C e $\Sigma_A f = \Sigma_B f + \Sigma_C f$. Se f é somável em B e C, também o é em A.

(f) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ (i.e. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Note que, pondo $\mathcal{B} \doteq \{\{1, \dots, n\} / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{Q} = \{F \subset \mathbb{N} / F \text{ finito}\}$, $(S_F)_{F \in \mathcal{B}}$ é um subnet de $(S_F)_{F \in \mathcal{Q}}$; portanto, se $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ for somável, então a série $\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente e sua soma coincide com $\Sigma_{\mathbb{N}} x$. Além disso, são equivalentes:

(i) $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é somável

(ii) $\sum x_n$ é uma série absolutamente convergente.

(iii) $\sum x_n$ " " " comutativamente " .

(g) [Fubini-Tonelli] Seja f definida em $A \times B$ e a valores em $(-\infty, +\infty]$ ou $[-\infty, +\infty)$. Se f for quase-somável em $A \times B$, então:

$$\sum_{A \times B} f = \sum_{a \in A} \Big(\sum_{b \in B} f(a,b) \Big) = \sum_{b \in B} \Big(\sum_{a \in A} f(a,b) \Big).$$

— 1 —

• Exercícios complementares (opcionais):

8.) [Somabilidade em espaços normados] Sejam X um espaço normado, f uma função a valores em X e $A \subset \operatorname{dom} f$. Definimos, como no ex. 7, o conjunto dirigido $(G, \leq)$, onde $G \doteq \{F \subset A \,/\, F \text{ finito}\}$ e $\leq$ dado pela inclusão, e o net $(S_F)_{F \in G}$ em X dado por $(\forall F \in G)\ S_F \doteq \sum_{a \in F} f(a) \in X$. Diz-se que f é somável em A se $(S_F)_{F \in G}$ for um net convergente; em caso afirmativo, $\sum_A f$ é o limite do referido net.

(a) Seja X esp. de Banach. Então f é somável em A <u>sse</u> for satisfeito o
Critério de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F_0 \in G \,/\, \forall F \in G$ disjunto de F_0, $\| \sum_{a \in F} f(a) \| < \varepsilon$.

<u>Sugestão</u>: Mostre que, num espaço métrico completo (X, d), todo net de Cauchy (i.e. um net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ em $X \,/\, \forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha_0 \in D$, $\forall \alpha, \beta \geq \alpha_0$, $d(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$) é convergente. Verifique, então, que a condição do exercício é equivalente a ser o net $(S_F)_{F \in G}$ de Cauchy.

(b) Diz-se que f é absolutamente somável se $\|f\|$ o for; mostre que f absolutamente somável $\Rightarrow$ f somável.

(c) Sejam X esp. de Banach e $B \subset A$. Se f for somável em A, então f é somável em B.

(d) Sejam X esp. de Banach e $A = B \dot{\cup} C$. Então f é somável em $A \Leftrightarrow f$ somável em B e em C; em caso afirmativo, $\sum_A f = \sum_B f + \sum_C f$.

(e) Sejam X esp. de Banach e $A = \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i$.

(i) Se f é somável em A, então $(\forall i \in I)$ f é somável em A_i, $i \in I \longmapsto \sum_{A_i} f$ é somável em I e:

$$\sum_A f = \sum_I \left(\sum_{A_i} f\right).$$

(ii) Se $(\forall i \in I)$ f é absolutamente somável em A_i e $i \in I \longmapsto \sum_{A_i} \|f\|$ é somável, então f é absolutamente somável.

(f) [Fubinito] Sejam X esp. de Banach e $A = B \times C$. Se f for somável em A, então $\sum_A f = \sum_{b \in B} \left(\sum_{c \in C} f(b,c)\right) = \sum_{c \in C} \left(\sum_{b \in B} f(b,c)\right)$.

Resoluções das Questões 7 e 8

7. a) É consequência imediata da questão 6.

b) Decorre imediatamente do fato de que a soma e o produto por escalares são contínuos $\therefore$ levam nets convergentes em nets convergentes.

c) 1) Suponha que f_+ e f_- sejam tais que $\sum_A f < +\infty$ ou $\sum_A f_- < \infty$. Decorre de b) que $f = f_+ - f_-$ é quase-somável e $\sum_A f = \sum_A f_+ - \sum_A f_-$.

2) Reciprocamente, suponha f quase-somável em A. Defina $A_+ \doteq \{x \in A \,/\, f(x) \geq 0\}$ e $A_- \doteq \{x \in A \,/\, f(x) < 0\}$, de modo que, $\forall F \subset A$ finito, $\sum_F f_+ = \sum_{F \cap A_+} f$ e $\sum_F f_- = -\sum_{F \cap A_-} f$. Dado $F \subset A$, usaremos a notação $F_+ \doteq F \cap A_+$, $F_- \doteq F \cap A_-$.

• Se $\sum_A f = \ell \in \mathbb{R}$: $\exists F_0 \subset A$ finito $/ \ \forall F \subset A$ finito com $F_0 \subset F$, $|\sum_F f - \ell| < 1$. Portanto, $\forall F \subset A$ finito com $F_0 \subset F$: $|\sum_{\underbrace{F_+ \cup F_{0,-}}_{\supset F_0}} f - \ell| < 1$ e $|\sum_{F_+ \cup F_{0,-}} f - \ell| = |\sum_{F_+} f + \sum_{F_{0,-}} f - \ell| \geq$

$\geq \sum_{F_+} f - |\sum_{F_{0,-}} f - \ell|$, donde $\sum_F f_+ = \sum_{F_+} f < 1 + |\sum_{F_{0,-}} f - \ell|$

$\therefore \sup\{\sum_F f_+ \,/\, F_0 \subset F \subset A \text{ finito}\} \leq 1 + |\sum_{F_{0,-}} f - \ell| < \infty$ $\therefore$ segue de a) que f_+ é somável; analogamente, f_- é somável. Portanto, $|f| = f_+ + f_-$ é somável. E, se $|f|$ somável, f_+ e f_- o são, por a).

• Se $\sum_A f = +\infty$ (o caso $\sum_A f = -\infty$ é análogo):

(12)

$\forall M>0, \exists F_0 \subset A$ finito $/ \forall F \subset A$ finito com $F_0 \subset F, \sum_F f > M$ (*)

Portanto, tomando $M=1$ em (*), $F \subset A$ finito $/ F_0 \subset F$:

$$1 < \sum_{\underbrace{F_- \cup F_{0,+}}_{\supset F_0}} f = \sum_{F_-} f + \sum_{F_{0,+}} f = -\sum_F f_- + \sum_{F_{0,+}} f \text{, donde}$$

$$\sum_F f_- < \sum_{F_{0,+}} f - 1 \therefore \sup \{ \sum_F f_- / F_0 \subset F \subset A \text{ finito} \} \leq \sum_{F_{0,+}} f - 1 < \infty,$$

logo f_- é somável em A. #

d.) Por c.), $|f|$ é somável; então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{a \in A / |f(a)| \geq 1/n\} \doteq A_n$ é finito (caso contrário, f não seria somável em A_n), donde

$$\{a \in A / f(a) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ é enumerável. \#}$$

e.) Basta considerar o caso $f \geq 0$; o caso geral seguirá deste caso e do item c.). Assim, basta verificar que, se $f \geq 0$, $\sum_A f = \sum_B f + \sum_C f$. Esta igualdade, por sua vez, é consequência imediata de a.), pois:

$$\{ S_F / F \subset A \text{ finito} \} = \{ S_F / F \subset B \text{ finito} \} + \{ S_F / F \subset C \text{ finito} \},$$

donde $\sup \{ S_F / F \subset A \text{ finito} \} = \sup \{ S_F / F \subset B \text{ finito} \} +$

$+ \sup \{ S_F / F \subset C \text{ finito} \}$. #

f.) Trivialmente, $\mathcal{B}$ é cofinal em $\mathcal{a}$, $\therefore (S_F)_{F\in\mathcal{B}}$ é um subnet de $(S_F)_{F\in\mathcal{a}}$, donde $(S_F)_{F\in\mathcal{a}}$ convergente $\Rightarrow (S_F)_{F\in\mathcal{B}}$ convergente para o mesmo limite. É claro que $(S_F)_{F\in\mathcal{B}}$ convergente $\overset{\text{em } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente e, em caso afirmativo, a soma da série coincide com o limite do net. Portanto, $x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ somável $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ conv.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : em qualquer livro de introdução à Análise Real.

$(i) \overset{(c)}{\Rightarrow} |x|$ somável $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{argumento acima}} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \quad \therefore (i) \Rightarrow (ii)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : $\forall F \subset \mathbb{N}$ finito, $\sum_F |x| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$

portanto o net das somas de $|x|$ em subconjuntos finitos de A é limitado em $\mathbb{R}$ i.e. $|x|$ é somável $\therefore x$ somável. #

—+—

g.) Será demonstrado o caso em que $\sum_{A\times B} f \in \mathbb{R}$; se $f \geq 0$ e $\sum_{A\times B} f = +\infty$, o argumento é similar, e o caso geral decorre de c.). f somável em $A \times B \overset{(e)}{\Rightarrow}$

$\overset{(e)}{\Rightarrow} f$ somável em todo subconjunto de $A \times B$, logo $(\forall a \in A)$ f é somável em $\{a\} \times B$. Provemos que

$$a \in A \longmapsto \sum_{\{a\}\times B} f = \sum_{b\in B} f(a,b)$$

é somável e sua soma coincide com $\sum_{A\times B} f$.

Com efeito, pela somabilidade de f:

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0,\ \exists F_0\subset A\times B \text{ finito} \,/\, \forall F_0\subset F\subset A\times B \text{ finito}: \\ \left|\sum_F f-\sum_{A\times B} f\right|<\varepsilon\end{array}\right.$$

Dado $\varepsilon>0$, tome F_0 dado por $(*)$; sejam $\pi_A: A\times B\to A$ a projeção no 1º fator e $F_0' \doteq \pi_A(F_0)$. Então $F_0'\subset A$ é finito; afirmo que, $\forall F_0'\subset F'\subset A$ finito:

$$(**)\quad \left|\sum_{a\in F'}\left(\sum_{b\in B} f(a,b)\right)-\sum_{A\times B} f\right|\leq\varepsilon$$

o que concluirá a demonstração. De fato, seja F' finito tal que $F_0'\subset F'\subset A$. Seja $\mathcal{B}\doteq\{F\subset F'\times B \,/\, F \text{ finito}, F_0\subset F\}$; o net $(S_F)_{F\in\mathcal{B}}$, $S_F=\sum_F f$, é um subnet do net das somas de f em subconjuntos finitos de $F'\times B$, portanto converge para $\sum_{F'\times B} f$. Por outro lado, $\forall F\in\mathcal{B}$, $\left|\sum_F f-\sum_{A\times B} f\right|<\varepsilon$; portanto, por continuidade, conclui-se que $\left|\sum_{F'\times B} f-\sum_{A\times B} f\right|\leq\varepsilon$. Mas, como F' é finito, a propriedade (e) aplicada para $F'\times B=\dot{\bigcup}_{a\in F'}\{a\}\times B$ implica $\sum_{F'\times B} f=\sum_{a\in F'}\left(\sum_{b\in B} f(a,b)\right)$, donde $(**)$.

Assim, $a\in A\mapsto \sum_{\{a\}\times B} f=\sum_{b\in B} f(a,b)$ é somável e sua soma é $\sum_{A\times B} f$; analogamente se verifica que

$$\sum_{A\times B} f=\sum_{b\in B}\left(\sum_{a\in A} f(a,b)\right).\quad \#$$

8.) (a) (i) <u>Lema</u>: Sejam (X,d) esp. métrico e $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ net de Cauchy em X. Então $(x_\alpha)_\alpha$ é convergente.

<u>Dem.</u>: $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ net de Cauchy significa, por definição:

$(*)$ $\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha_0\in D \,/\, \forall \alpha,\beta\geqslant\alpha_0,\ d(x_\alpha,x_\beta)<\varepsilon.$

Defina $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indutivamente por:

(i) Tome $\varepsilon=1$ em $(*)$ e α_0 correspondente; $y_1 \doteq x_{\alpha_0}$.

(ii) Suponha definidos y_n, $1\leqslant n\leqslant k$, tais que $(\forall 1\leqslant n\leqslant k)$ $y_n = x_{\alpha_n}$, onde α_n faz valer $(*)$ p/ $\varepsilon = 1/n$, e $\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_k$. Tome α'_{k+1} que faça valer $(*)$ p/ $\varepsilon=1/_{k+1}$; tome $\alpha_{k+1}\in D \,/\, \alpha_{k+1}\geqslant\alpha'_{k+1}$ e $\alpha_{k+1}\geqslant\alpha_k$ (que existe, pois D é dirigido por $\leq$), de modo que $(*)$ para $\varepsilon = 1/_{k+1}$ também vale com α_{k+1}. Defina $y_{k+1}\doteq x_{\alpha_{k+1}}$.

Então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assim definida é tal que:

$(**)$ $\forall p,q\geqslant n,\quad d(y_p,y_q) = d(x_{\alpha_p},x_{\alpha_q}) \leqslant 1/n$

$\hookrightarrow \alpha_p,\alpha_q\geqslant\alpha_n$ por construção

$\therefore (y_n)_n$ é de Cauchy $\therefore \exists y_0\in X \,/\, y_n\to y_0$ e, tomando-se $\lim\limits_{q\to\infty}$ em $(**)$, conclui-se que $\forall p\geqslant n$, $d(y_p,y_0)\leqslant 1/n$.

Logo, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in D\,/\,\alpha\geqslant\alpha_n$:

$$d(x_\alpha,y_0)\leqslant \underbrace{d(x_\alpha,y_n)}_{\substack{\shortparallel\\ d(x_\alpha,x_{\alpha_n})\leqslant 1/n}} + \overbrace{d(y_n,y_0)}^{\leqslant 1/n} \leqslant 2/n$$

donde $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ conv. p/ y_0.

(ii) Seja $(S_F)_{F\in \mathcal{Q}}$ o net das somas de f em subconjuntos finitos de A.

– Se for satisfeita a condição do enunciado, dado $\varepsilon>0$:

$$\forall F, G \geq \overset{\text{como no enunciado}}{F_0}, \ \| S_F - S_G \| \leq \| S_{F\setminus G} \| + \| S_{G\setminus F} \| < 2\varepsilon$$

pois $F\setminus G, G\setminus F \in \mathcal{Q}$ e são disjuntos de F_0. $\therefore (S_F)_{F\in\mathcal{Q}}$ é de Cauchy.

– Se $(S_F)_{F\in\mathcal{Q}}$ for de Cauchy:

$\forall \varepsilon>0, \exists F_0 \subset A$ finito $/ \forall F, G \geq F_0$ em $\mathcal{Q}$,

$\| S_F - S_G \| < \varepsilon$.

Assim, se $F \in \mathcal{Q} / F \cap F_0 = \emptyset$:

$\| S_F \| = \| S_{F\cup F_0} - S_{F_0} \| < \varepsilon$,

donde a condição do enunciado é satisfeita. #

—— x ——

(b) É consequência imediata de (a).

—— x ——

(c) Idem.

—— x ——

(d) Por c), f somável em A $\Rightarrow$ f somável em B e C.

Suponha f somável em B e C, então, $\forall \varepsilon>0, \exists B_0 \subset B$ e $\exists C_0 \subset C$ finitos tais que $\forall B_0 \subset F \subset B$ finito e $\forall C_0 \subset G \subset C$ finito, tem-se: $\| \Sigma_F f - \Sigma_B f \| < \varepsilon$ e $\| \Sigma_G f - \Sigma_C f \| < \varepsilon$. Assim, $B_0 \cup C_0 \subset A$ é finito e,

$\forall F \subset A$ finito $/ B_0 \cup C_0 \subset F$, tem-se:

$$\left\| \Sigma_F f - \left(\Sigma_B f + \Sigma_C f\right) \right\| = \left\| \left(\Sigma_{F\cap B} f - \Sigma_B f\right) + \left(\Sigma_{F\cap C} f - \Sigma_C f\right) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \Sigma_{F\cap B} f - \Sigma_B f \right\| + \left\| \Sigma_{F\cap C} f + \Sigma_C f \right\| < 2\varepsilon.$$

Portanto, f é somável em A e $\Sigma_A f = \Sigma_B f + \Sigma_C f$. #

$\longrightarrow$

(e) i) Se f for somável em A, por c) f é somável em A_i, $\forall i \in I$. Além disso, por definição de somabilidade:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists F_0 \subset A$ finito $/ \forall F_0 \subset F \subset A$ finito,

(*) $\| S_F - \Sigma_A f \| < \varepsilon$.

Seja $F_0' \doteq \{ i \in I / F_0 \cap F_i \neq \emptyset \}$. Como os F_i's são disjuntos, segue-se que $F_0' \subset I$ é finito. Seja $F' \subset I$ finito tal que $F_0' \subset F'$; defina $\mathcal{B} \doteq \{ F \subset \bigcup_{i \in F'} A_i / F$ é finito e $F_0 \subset F \}$. O net $(S_F)_{F \in \mathcal{B}}$ é um subnet do net das somas de f em subconjuntos finitos em $\bigcup_{i\in F'} A_i$, portanto, converge p/ $\Sigma_{\bigcup_{i\in F'} A_i} f$. Por outro lado, $\forall F \in \mathcal{B}$, $\| S_F - \Sigma_A f \| < \varepsilon$, por (*); portanto, por continuidade, conclui-se que $\left\| \Sigma_{\bigcup_{i\in F'} A_i} f - \Sigma_A f \right\| \leq \varepsilon$. Mas, como

F' é finito, aplicando-se (d) para $\dot{\bigcup}_{i\in F'} A_i$,

conclui-se que $\sum_{\bigcup_{i\in F'} A_i} f = \sum_{i\in F'} \left(\sum_{A_i} f\right)$. Pela arbitrariedade de $F' \subset I$ finito / $F'_0 \subset F'$ tomado, conclui-se que $i \in I \longmapsto \sum_{A_i} f$ é somável e sua soma coincide com $\sum_A f$. #

(ii) Seja $\varepsilon > 0$.

1) $\exists\, I_0 \subset I$ finito / $\forall F \subset I$ finito disjunto de I_0, tem-se $\sum_{i\in F} \left(\sum_{A_i} \|f\|\right) < \varepsilon/2$.

2) $\forall i \in I_0$, $\exists\, F_0^i \subset A_i$ finito / $\forall F \subset A_i$ finito disjunto de F_0^i, tem-se $\sum_F \|f\| < \dfrac{\varepsilon}{2\cdot \# I_0}$.

Tome $F_0 \doteq \bigcup_{i\in I_0} F_0^i \subset A$. Então F_0 é finito e, $\forall F \subset A$ finito disjunto de F_0, tem-se $F = \left(\dot{\bigcup}_{i\in I_0} F\cap A_i\right) \dot\cup$ $\dot\cup \left(F \cap \bigcup_{i\in I\setminus I_0} A_i\right)$, donde, pondo $F' = \{i \in I\setminus I_0 : F\cap A_i \neq \emptyset\}$

$$\sum_F \|f\| = \sum_{i\in I_0} \underbrace{\left(\sum_{F\cap A_i} \|f\|\right)}_{<\frac{\varepsilon}{2\cdot\# I_0} \text{ por } 2)} + \underbrace{\sum_{F\cap \bigcup_{i\in I\setminus I_0} A_i} \|f\|}_{\leq \sum_{\bigcup_{i\in F'} A_i} \|f\| \overset{(d)}{=} \sum_{i\in F'} \left(\sum_{A_i} \|f\|\right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ por } 1)} < \varepsilon.$$

$\therefore$ f é somável em A, pelo critério de Cauchy. #

f) Como $B \times C = \dot{\bigcup_{b \in B}} \{b\} \times C$, segue-se de e) que $\sum_{B \times C} f = \sum_{b \in B} \left(\sum_{c \in C} f(b,c) \right)$ e, de forma análoga,

$$\sum_{B \times C} f = \sum_{c \in C} \left(\sum_{b \in B} f(b,c) \right). \quad \#$$