

MAT5798 - Medida e Integração

Prof. Gláucio Terra

P1 - 26/04/2012

Nome: _____

Assinatura: _____

1. O exame tem duração de 4 horas.
2. O exame pode ser feito a lápis.
3. Justifique as suas afirmações.
4. Você deve escolher questões somando no máximo 10 pontos. Marque as questões escolhidas com um “X” na coluna “Aluno(a)” da tabela abaixo.

	Aluno(a)	Professor
Q1 (1 pt)		
Q2 (1 pt)		
Q3 (1 pt)		
Q4 (1 pt)		
Q5 (1 pt)		
Q6 (1 pt)		
Q7 (2 pt)		
Q8 (2 pt)		
Q9 (2 pt)		
Q10 (3 pt)		
Pontuação:		

Boa prova!

Questão 1-) (1 pt) Sejam $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita e μ_F a medida de Lebesgue-Stieltjes induzida por F . Mostre que F é contínua se, e somente se, $(\forall x \in \mathbb{R}) \mu_F(\{x\}) = 0$.

Questão 2-) (1 pt) Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-mensuráveis. Defina $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0$. Mostre que $f + g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é Lebesgue-mensurável.

Questão 3- (1 pt) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-mensurável tal que o conjunto dos pontos onde f é $\pm\infty$ tenha medida nula. Mostre que $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ tal que, para $E \doteq \{|f| \leq M\}$, tem-se $m(E^c) < \epsilon$.

Questão 4- (1 pt) Sejam X um conjunto e $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ uma medida exterior. Diz-se que μ^* é *regular* se, para todo $A \subset X$, existir um conjunto μ^* -mensurável $E \subset X$ tal que $A \subset E$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E)$. Mostre que, se μ^* for regular, então, para toda sequência crescente $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec 2^X$, tem-se $\mu^*(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim \mu^*(A_n)$.

Questão 5- (1 pt) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis tais que $f_n \rightarrow f$ quase sempre. Mostre que $f_n \rightarrow f$ em medida.

Questão 6- (1 pt) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-integrável. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-n) \left(\frac{x}{1+|x|} \right) dx$$

Questão 7- (2 pt) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f \in L^1(\mu)$. Mostre que, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$, então $|\int_E f| < \epsilon$.

Questão 8- (2 pt) Calcule:

$$\int_0^1 \int_y^1 x^{-3/2} \cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right) dx dy$$

Questão 9- (2 pt) Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ Lebesgue-integrável. Suponha que, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(x)^n dx = \int_0^1 f(x) dx$. Mostre que existe $E \subset [0, 1]$ boreliano tal que $f = \chi_E$ quase sempre.

Questão 10- (3 pt) Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções Lebesgue-integráveis $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ e $g \in L^1([0, 1])$ tais que: (i) $\lim \int_0^1 |f_n(x)| dx = 0$ e (ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) |f_n|^2 \leq g$. Mostre que $\lim \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = 0$.