MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010

Prof. Gláucio Terra

9ª Lista de Exercícios - Integrais de Superfície

- 1-) Seja $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ difeomorfismo de classe C^1 tal que $f^*(dx^1 \wedge dx^2) = 2dx^3 \wedge dx^4$ e $f^*(dx^3 \wedge dx^4) = \frac{1}{2} dx^1 \wedge dx^2$. Então, para todo conjunto J-mensurável $X \subset \mathbb{R}^4$, tem-se $\text{vol } f(X) = \text{vol } X$.
- 2-) Sejam M^m superfície orientada com bordo de classe $C^{k \geq 1}$, F espaço de Banach, $\alpha, \beta \in \Omega_m^{(0)}(M, F)$ formas com suporte compacto e $c \in \mathbb{R}$. Tem-se:
1. $\int_M (\alpha + \beta) = \int_M \alpha + \int_M \beta$.
 2. $\int_M (c\alpha) = c \int_M \alpha$.
 3. Se $F = \mathbb{R}$ e $\alpha \geq 0$ (i.e. se $(\forall x \in M) \alpha(x) \geq 0$, i.e. numa carta positiva $\alpha(x) = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ com $a(x) \geq 0$), então $\int_M \alpha \geq 0$; se $\alpha \geq 0$ e se existir $x \in M$ tal que $\alpha(x) > 0$, então $\int_M \alpha > 0$.
 4. Se N for outra superfície orientada de classe C^k e $f : N \rightarrow M$ for um difeomorfismo C^1 , tem-se:
 - (a) se f preserva as orientações (i.e. se f' leva bases positivas em bases positivas), então $\int_N f^* \alpha = \int_M \alpha$.
 - (b) se f reverte as orientações, então $\int_N f^* \alpha = - \int_M \alpha$.
- 3-) Sejam M^m, N^n superfícies orientadas e ω uma $(m+n)$ -forma contínua com suporte compacto em $M \times N$. Para cada $x \in M$ e $v_1, \dots, v_m \in T_x M$, defina uma n -forma $\beta = \omega_x(v_1, \dots, v_m)$ em N por $\beta(y; u_1, \dots, u_n) \doteq \omega((x, y); v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n)$. Mostre que β é contínua e tem suporte compacto. Definindo α m -forma em M por $\alpha(x; v_1, \dots, v_m) \doteq \int_N \omega_x(v_1, \dots, v_m)$, então α também é contínua e tem suporte compacto. Finalmente, $\int_{M \times N} \omega = \int_M \alpha = \int_M (\int_N \beta)$.
- 4-) Sejam α e β formas contínuas com suportes compactos e graus máximos nas superfícies orientadas M e N , respectivamente. Denotando por $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ e $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ as projeções no primeiro e segundo fator, respectivamente, tem-se $\int_{M \times N} \pi_M^* \alpha \wedge \pi_N^* \beta = (\int_M \alpha) \cdot (\int_N \beta)$.
- 5-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, F espaço de Banach e $\omega \in \Omega_n^{(1)}(\mathcal{U}, F)$. Então ω é fechada se, e somente se, para todo domínio compacto (i.e. uma superfície com bordo compacta, de dimensão máxima) $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com bordo ∂D de classe C^1 , tem-se $\int_{\partial D} \omega = 0$.
- 6-) Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores C^∞ no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ e $M \subset \mathcal{U}$ uma superfície C^∞ tal que $F(p) = 0$ para todo $p \in M$. Então, para todo $p \in M$, tem-se $\text{rot } F(p) \in T_p M$.
- 7-) Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio compacto com fronteira regular. Dada $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 , com $F(x) = (f(x), g(x))$, tem-se $\int_D \det F'(x) dx = \int_{\partial D} f dg$.

8-) (INTEGRAIS IMPRÓPRIAS) Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^n$ superfície orientada com bordo de classe $C^{k \geq 1}$, ω uma m -forma em M (a valores em $\mathbb{R}$) limitada numa vizinhança de cada ponto de M (i.e. tal que, $\forall p \in M$, existem $\mathcal{U}$ vizinhança de p e $c > 0$ tal que $(\forall x \in \mathcal{U}, \forall v_1, \dots, v_m \in T_x M) |\omega(x; v_1, \dots, v_m)| \leq c \|v_1\| \cdots \|v_m\|$) e tal que o conjunto dos pontos de descontinuidade de ω tenha medida nula em M .

1. Se ω tiver suporte compacto contido num aberto $\mathcal{U}$, com $\phi : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}$ carta positiva de M , existe uma única $f : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi^* \omega = f e^1 \wedge \cdots \wedge e^m$. Verifique que as hipóteses assumidas sobre ω implicam que f é limitada, tem suporte compacto e é contínua exceto num conjunto de medida nula; assim, podemos definir $\int_M \omega \doteq \int_{\mathcal{U}_0} f$. Como no caso de formas contínuas com suporte compacto, o fato de esta definição ser independente da carta positiva tomada é uma consequência do teorema de mudança de variáveis para a integral de Riemann. Mais geralmente, se ω tem suporte compacto, podemos usar uma partição da unidade conveniente para escrever $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$ como soma de um número finito de formas com suportes compactos contidos em imagens de cartas positivas de M , cada qual limitada numa vizinhança de cada ponto de M e contínua exceto num conjunto de medida nula; definimos, então, $\int_M \omega \doteq \sum_{i=1}^k \int_M \omega_i$.

2. Suponha $\omega \geq 0$ (nenhuma restrição se faz sobre o suporte de ω). Diz-se que ω é *integrável* se, dada $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ partição da unidade C^k em M tal que $(\forall i \in \mathbb{N}) \text{supp } \xi_i$ compacto, pondo $(\forall i \in \mathbb{N}) \omega_i \doteq \xi_i \omega$, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \int_M \omega_i$ for convergente, onde $\int_M \omega_i$ definida como no item anterior. Em caso afirmativo, definimos $\int_M \omega \doteq \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \omega_i$. Mostre que estas definições independem da partição da unidade tomada, i.e. se $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ for outra partição da unidade C^k em M tal que $(\forall i \in \mathbb{N}) \text{supp } \eta_i$ compacto, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \int_M (\xi_i \omega)$ é convergente se, e somente se, $\sum_{i=1}^{\infty} \int_M (\eta_i \omega)$ o for; em caso afirmativo, as somas das duas séries coincidem. SUGESTÃO: Verifique que ω é integrável com respeito a $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, a série dupla $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_M (\xi_i \eta_j \omega)$ for convergente, e que ω é integrável com respeito a $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, a série dupla $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_M (\xi_i \eta_j \omega)$ for convergente. Agora proceda conforme a sugestão da questão 14 da lista 8.

3. No caso geral, definimos as m -formas ω_+ e ω_- por, respectivamente, $\omega_+(x) \doteq \omega(x)$ se $\omega(x) \geq 0$ e 0 caso contrário, e $\omega_-(x) \doteq -\omega(x)$ se $\omega(x) \leq 0$ e 0 caso contrário. Verifique que ω_+ e ω_- são positivas, limitadas numa vizinhança de cada ponto e contínuas, exceto num conjunto de medida nula. Dizemos que ω é *integrável* se ω_+ e ω_- o forem; em caso afirmativo, $\int_M \omega \doteq \int_M \omega_+ - \int_M \omega_-$.

4. Sejam $\omega \geq 0$ e $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma exaustão de M por compactos J -mensuráveis. Mostre que ω é integrável em M se, e somente se, existir $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} \omega$. Em caso afirmativo, o referido limite coincide com $\int_M \omega$.

5. Sejam α, β m -formas integráveis em M , no sentido da definição dos itens anteriores, e $c \in \mathbb{R}$. Tem-se:

(a) $\alpha + \beta$ é integrável e $\int_M (\alpha + \beta) = \int_M \alpha + \int_M \beta$.

(b) $c\alpha$ é integrável e $\int_M (c\alpha) = c \int_M \alpha$.

(c) Se $\alpha \geq 0$, $\int_M \alpha \geq 0$.

(d) Se N for outra superfície orientada de classe C^k e $f : N \rightarrow M$ for um difeomorfismo C^1 , tem-se:

i. se f preserva as orientações, então $f^* \alpha$ é integrável e $\int_N f^* \alpha = \int_M \alpha$.

ii. se f reverte as orientações, então $f^* \alpha$ é integrável e $\int_N f^* \alpha = - \int_M \alpha$.

9-) Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^n$ superfície orientada com bordo de classe $C^{k \geq 1}$ e ω uma m -forma em M integrável (no sentido da questão anterior). Tem-se:

1. (IRRELEVÂNCIA DOS CONJUNTOS DE MEDIDA NULA) Se $F \subset M$ é um fechado de medida nula em M , então $\int_{M \setminus F} \omega = \int_M \omega$. SUGESTÃO: É suficiente considerar o caso $\omega \geq 0$. Mostre que, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de F tal que $|\int_{\mathcal{U}} \omega| < \epsilon$. A seguir, tome (ξ_1, ξ_2) partição da unidade estritamente subordinada à cobertura aberta $(M \setminus F, \mathcal{U})$, ponha $\omega_i \doteq \xi_i \omega$, $i = 1, 2$, e conclua que $|\int_M \omega - \int_M \omega_1| < \epsilon$, donde $|\int_M \omega - \int_{M \setminus F} \omega| < \epsilon$.
2. (IRRELEVÂNCIA DOS ZEROS) Se $F \subset M$ é um fechado no qual ω se anula, então $\int_{M \setminus F} \omega = \int_M \omega$. SUGESTÃO: É suficiente considerar o caso $\omega \geq 0$. Mostre que, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de F tal que $|\int_{\mathcal{U}} \omega| < \epsilon$ e repita o argumento do item anterior.
3. Seja N^m outra superfície orientada com bordo de classe C^k e $f : N \rightarrow M$ um homeomorfismo de classe C^k , tal que $(\forall x \in N) \det f'(x) \geq 0$. Então $f^* \alpha$ é integrável e $\int_N f^* \alpha = \int_M \alpha$.
4. Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Considere S^1 orientada pela normal exterior a $B_1(0)$, e seja ω uma 1-forma contínua em S^1 . Mostre que $\int_{[0, 2\pi]} f^* \omega = \int_{S^1} \omega$.

10-) Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , estritamente positiva. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ a superfície obtida por meio da revolução, relativamente ao eixo Ox , do gráfico de f (no plano Oxy). Mostre que a área de M é dada por $\int_a^b 2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}$.

11-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Diz-se que f é harmônica se $\Delta f \doteq \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ se anular identicamente em $\mathcal{U}$. Mostre que f é harmônica se, e somente se, para todo domínio compacto com fronteira regular $D \subset \mathbb{R}^n$, tem-se $\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$, onde $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a normal unitária externa a ∂D .

12-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u, v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 . Seja D um domínio compacto com fronteira regular. Aplique o teorema da divergência ao campo $F = u \text{ grad } v$ para obter a *primeira fórmula de Green*:

$$\int_D [u \Delta v + \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle] dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad (1)$$

onde $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a normal unitária externa a ∂D . Usando esta fórmula com $u = v$, conclua que, se u é uma função harmônica que se anula em ∂D , então $u \equiv 0$. Noutras palavras, tem-se a unicidade das soluções de $\Delta u = 0$ em $C^2(D)$ com condição inicial prescrita em ∂D (i.e. se duas tais soluções coincidirem em ∂D , então elas são iguais).

13-) Obtenha, com as mesmas hipóteses da questão anterior, a *segunda fórmula de Green*:

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}), \quad (2)$$

onde $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a normal unitária externa a ∂D .

14-) Seja D um domínio compacto, conexo, com fronteira regular em $\mathbb{R}^n$. Duas funções harmônicas u, v definidas num aberto contendo D , tais que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ em ∂D , onde $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a normal unitária externa a ∂D , diferem por uma constante em D . Em particular, se u é harmônica e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em ∂D , então u é constante. Ou seja, se D é um sólido termicamente isolado, a única distribuição estacionária de temperatura em D é a constante.

15-) Nas condições da questão anterior, se $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0$ em ∂D , então u é constante em D .

- 16-) (PROPRIEDADE DA MÉDIA PARA FUNÇÕES HARMÔNICAS) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica. Então, para todo $x_0 \in \mathcal{U}$ e para todo $r > 0$ tal que $B_r[x_0] \subset \mathcal{U}$, tem-se:

$$\frac{1}{\text{vol } S_r(x_0)} \int_{S_r(x_0)} f dS = f(x_0),$$

onde $S_r(x_0)$ denota a esfera de centro x_0 e raio r .

- 17-) (EXAME DE QUALIFICAÇÃO - JAN/2010) Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ a bola aberta de centro na origem e raio 1, e u uma função de classe C^2 definida numa vizinhança de $\overline{D}$, tal que $u|_{\partial D} = 0$, u não identicamente nula, e tal que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ constante tal que $\Delta u = \lambda u$ em D (i.e. u é uma auto-função do laplaciano). Mostre que $\int_D \|\nabla u\|^2 + \lambda \int_D u^2 = 0$. Conclua que $\lambda < 0$. SUGESTÃO: CALCULE $\Delta(u^2)$.

- 18-) (EXAME DE QUALIFICAÇÃO - JAN/2010) Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um difeomorfismo de classe C^1 e $J : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o jacobiano de f . Dados $x_0 \in \mathbb{R}^3$ e $r > 0$, denote por $Q_r(x_0)$ o cubo em $\mathbb{R}^3$ centrado em x_0 , com arestas paralelas aos eixos e de lado r . Mostre que:

$$|J(x_0)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol } f(Q_r(x_0))}{r^3} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|^3}{\|x - x_0\|^3}$$

(onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclideana em $\mathbb{R}^3$). SUGESTÃO: PARA VERIFICAR A DESIGUALDADE, USE UMA BOLA DE RAIO r CENTRADA EM x_0 NO LUGAR DE $Q_r(x_0)$.

- 19-) (VOLUME DA ESFERA DE RAIO r EM $\mathbb{R}^n$) Calcule o volume da esfera $S^n(r)$ de raio r centrada na origem de $\mathbb{R}^n$ em função do volume $V_n(r)$ da bola de raio r centrada na origem, o qual foi calculado na última questão da lista 8. SUGESTÃO: Aplique o teorema da divergência.

- 20-) Em $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, denote por $x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ a projeção no primeiro fator, por $y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ a projeção no segundo fator, por $z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a identidade, de modo que $z = (x, y) = x + iy$, e por $\bar{z} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a conjugação, de modo que $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$. Olhando para $x, y, z, \bar{z}$ como 0-formas em $\mathbb{R}^2$ a valores em $\mathbb{C}$, podemos tomar derivadas exteriores para obter 1-formas, a valores em $\mathbb{C}$, $dx, dy, dz, d\bar{z}$, as quais se relacionam por: $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, de modo que $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ e $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$. Assim, dados $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 (i.e. $f \in \Omega_0^{(1)}(\mathcal{U}, \mathbb{C})$), tem-se $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$, onde $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ (i.e. a derivada direcional de f com respeito ao vetor $\frac{1}{2}(1, -1)$) e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ (i.e. a derivada direcional de f com respeito ao vetor $\frac{1}{2}(1, 1)$).

1. Com a notação acima, dada $f \in \Omega_0^{(1)}(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, mostre que as seguintes condições são equivalentes:

- (a) f é holomorfa em $\mathcal{U}$, i.e. $\forall z_0 \in \mathcal{U}, \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ (vide questão 4 da lista 2).
 (b) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, i.e. $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.
 (c) $f dz$ é uma 1-forma fechada.

Em caso afirmativo, i.e. se as condições equivalentes acima forem verificadas, tem-se ($\forall z_0 \in \mathcal{U}$) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}$, e definimos ($\forall z_0 \in \mathcal{U}$) $f'(z_0) \doteq \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}$.

2. Conclua, a partir do item anterior, que f é holomorfa se, e somente se, para todo $z_0 \in \mathcal{U}$ e todo $\rho > 0$ tal que $B_\rho[z_0] \subset \mathcal{U}$, tem-se $\int_{S_\rho(z_0)} f dz = 0$.

3. Aplique o lema de Poincaré para concluir que, se f for holomorfa em $\mathcal{U}$ aberto estrelado, existe $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g' = f$.

4. (FÓRMULA DE CAUCHY-GREEN) Sejam $D \subset \mathcal{U}$ um domínio compacto com fronteira C^1 e $\zeta \in \overset{\circ}{D}$. Mostre que:

$$2\pi i f(\zeta) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \zeta} d\bar{z} \wedge dz \quad (3)$$

onde $\int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \zeta} d\bar{z} \wedge dz = \int_D 2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \zeta} dx \wedge dy$ denota a integral (imprópria) em $D \setminus \{\zeta\}$. Em particular, se f for holomorfa, obtenha a fórmula integral de Cauchy. SUGESTÃO: Tome $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon[\zeta] \subset \overset{\circ}{D}$, defina $D_\epsilon \doteq D \setminus B_\epsilon(\zeta)$ e aplique o teorema de Stokes para calcular $\int_{\partial D_\epsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$, levando em conta que $z \mapsto \frac{1}{z - \zeta}$ é holomorfa em $\mathcal{U} \setminus \{\zeta\}$. A seguir, tome $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$.