MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010
Prof. Gláucio Terra

8^a Lista de Exercícios - Integrais

1-) Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula, então, para todo $Y \subset \mathbb{R}^n$, $X \times Y$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{m+n}$.

2-)
1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado de conteúdo nulo. Então $\overline{X}$ tem conteúdo nulo.
2. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto J-mensurável. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções limitadas e $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ tem conteúdo nulo, então f é Riemann-integrável se, e somente se, g o for. Em caso afirmativo, $\int_X f = \int_X g$.

3-)
1. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável, então $\overline{X}$ e $\overset{\circ}{X}$ também o são, e $\operatorname{vol} \overline{X} = \operatorname{vol} X = \operatorname{vol} \overset{\circ}{X}$.
2. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ J-mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ Riemann-integrável. Se $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{R}$ for uma extensão limitada qualquer de f, então $\overline{f}$ é Riemann-integrável e $\int_{\overline{X}} \overline{f} = \int_X f = \int_{\overset{\circ}{X}} f$.

4-) Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ J-mensurável, $x_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $X_n \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto J-mensurável de volume positivo tal que $X_n \subset X \cap B_{1/n}(x_0)$. Mostre que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\operatorname{vol}(X_n)} \int_{X_n} f = f(x_0).$$

5-) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ J-mensurável. Para todo $\epsilon > 0$, existe $C \subset X$ compacto J-mensurável tal que $\operatorname{vol}(X \setminus C) < \epsilon$.

6-) (Teorema de Sard) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Seja $S \doteq \{x \in \mathcal{U} \mid \det f'(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos singulares de f. Então $f(S)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Sugestão:

1. É suficiente provar que, se $C \subset \mathcal{U}$ for um cubo fechado, então $f(C \cap S)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.
2. Considere em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana e seja $C \subset \mathcal{U}$ um cubo fechado. Sejam P a partição de C obtida pela subdivisão de cada uma de suas arestas em k intervalos de mesmo comprimento $\delta > 0$, e $\mathcal{B}$ o conjunto dos blocos de P que intersectam S, de modo que $f(S) \subset f(\cup \mathcal{B})$. Dado $\epsilon > 0$, queremos mostrar que, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (i.e. $\delta > 0$ suficientemente pequeno), tem-se $\operatorname{vol}(\cup \mathcal{B}) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{vol}\big(f(B)\big) < \epsilon$.
3. Seja $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tome $x_i \in B_i \cap S$, e $\mathsf{E}_i \subset \mathbb{R}^n$ subespaço de codimensão 1 tal que $f'(x_i) \cdot \mathbb{R}^n \subset \mathsf{E}_i$. Para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $f(x_i) + f'(x_i) \cdot v$ pertence ao subespaço afim $\mathsf{E}'_i \doteq f(x_i) + \mathsf{E}_i$. Ora, para todo $x \in B_i$, tem-se $f(x) = f(x_i) + f'(x_i) \cdot (x - x_i) + r_i(x)$, com $\lim_{x \to x_i} \frac{r_i(x)}{\|x - x_i\|} = 0$. O fato de ser f de classe C^1 e C compacto garante, conforme a questão 1 da lista 3, que f é uniformemente derivável em C; assim, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher a aresta $\delta > 0$ dos subcubos da partição P suficientemente pequena para que $(\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \forall x \in B_i) \|r_i(x)\| < \epsilon \|x - x_i\| \leqslant n\delta\epsilon$. Por outro lado, tomando $c > 0$ limitante superior para a função contínua $\|f'\|$

no compacto C, tem-se $(\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \forall x \in B_i)\|f'(x_i)\cdot(x-x_i)\| \leqslant c\|x-x_i\| \leqslant nc\delta$. Assim, $(\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \forall x \in B_i) f(x_i)+f'(x_i)\cdot(x-x_i)$ pertence a um cubo de aresta $2nc\delta$ no subespaço afim E_i'; portanto, $f(x)=f(x_i)+f'(x_i)\cdot(x-x_i)+r_i(x)$ pertence a um paralelepípedo em $\mathbb{R}^n$ cuja seção média é um cubo em E_i' de aresta $2n\delta(c+\epsilon)$, e de altura $2n\delta\epsilon$. Portanto, $(\forall 1 \leqslant i \leqslant n) f(B_i)$ está contido num paralelepípedo de volume $2^n n^n \delta^n (c+\epsilon)^{n-1}\epsilon$.

7-) (Teorema de Sard, bis) Seja $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ uma aplicação de classe C^1 entre superfícies de mesma dimensão m. Seja $S \doteq \{x \in \mathsf{M} \mid f'(x) : \mathsf{T}_x\mathsf{M} \to \mathsf{T}_{f(x)}\mathsf{N}$ não é isomorfismo$\}$ o conjunto dos pontos singulares de f. Então $f(S)$ tem medida nula na superfície N. Sugestão: É um corolário da questão anterior, pois, conforme visto em aula, um conjunto é de medida nula se, e somente se, for localmente de medida nula.

8-) Seja $(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família de subconjuntos de uma superfície M tal que cada compacto $K \subset \mathsf{M}$ tem intersecção vazia apenas com um número finito de conjuntos C_λ. Então a família dada é localmente finita.

9-) Sejam $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família localmente finita de subconjuntos fechados de uma superfície M e $F \doteq \cup_{\lambda\in L}F_\lambda$. Se $f : F \to \mathbb{R}^n$ é tal que $f|_{F_\lambda}$ é contínua para cada $\lambda \in L$, então f é contínua.

10-) (Lema de Urysohn diferenciável) Sejam $F, G \subset \mathbb{R}^n$ fechados disjuntos. Mostre que existe $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ de classe C^∞ tal que $f|_F = 1$ e $f|_G = 0$.

11-) (extensões de aplicações diferenciáveis)

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}^m$. Suponha que, para todo $p \in X$, existe $\mathcal{U}_p$ vizinhança aberta de $p \in \mathbb{R}^n$ e $f_p : \mathcal{U}_p \to \mathbb{R}^m$ diferenciável (respectivamente, $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$) tal que $f_p|_{X\cap\mathcal{U}_p} = f|_{X\cap\mathcal{U}_p}$. Então existem $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ diferenciável (respectivamente, C^{k}) tais que $X \subset \mathcal{U}$ e $g|_X = f$. Em particular, se $H \subset \mathbb{R}^n$ for um semi-espaço, $\mathcal{U}$ aberto em H com $\partial\mathcal{U} \neq \emptyset$ e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ diferenciável (respectivamente, $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$), então existe g diferenciável (respectivamente, C^{k}) definida num aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo $\mathcal{U}$ cuja restrição a $\mathcal{U}$ coincide com f.

2. Com a mesma hipótese do item anterior, suponha que $f(X)$ esteja contido na esfera unitária $\mathsf{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$. Então existem $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g : \mathcal{U} \to \mathsf{S}^{m-1}$ diferenciável (respectivamente, C^{k}) tais que $X \subset \mathcal{U}$ e $g|_X = f$.

12-) Sejam $\mathsf{M}^m \subset \mathbb{R}^n$ superfície (sem bordo) de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ e $f : \mathsf{M} \to \mathbb{R}^m$ diferenciável (respectivamente, de classe C^{k}). Então existem $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ diferenciável (respectivamente, C^{k}) tais que $\mathsf{M} \subset \mathcal{U}$ e $g|_{\mathsf{M}} = f$. Se M for um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^n$, é possível tomar $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$. Observação: o mesmo vale se M for uma superfície com bordo.

13-) (aproximação de aplicações contínuas por aplicações diferenciáveis)

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$ e $\epsilon : X \to (0, +\infty)$, ambas contínuas. Então existem $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ e $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ tais que $\mathcal{U} \supset X$ e $(\forall x \in X)\|g(x) - f(x)\| < \epsilon(x)$.

   Sugestão:

   (a) Verifique que, $\forall p \in X$, existe $\mathcal{U}_p \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança aberta de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $(\forall x \in \mathcal{U}_p \cap X)\|f(x) - f(p)\| < \epsilon(x)$. Para tal, basta observar que $x \in X \mapsto \epsilon(x) - \|f(x) - f(p)\| \in \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva em p.

(b) Sejam $\mathcal{U} \doteq \cup_{p \in X} A_p$ (o qual é aberto em $\mathbb{R}^n$) e $(\xi_p)_{p \in X}$ uma partição da unidade de classe C^∞ estritamente subordinada à cobertura $(\mathcal{U}_p)_{p \in X}$ do aberto $\mathcal{U}$. Defina $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ por $g(x) \doteq \sum_{p \in X} \xi_p(x) f(p)$.

2. Com a mesma hipótese do item anterior, suponha que $f(X)$ esteja contido na esfera unitária $\mathsf{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$. Então existem $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g : \mathcal{U} \to \mathsf{S}^{m-1}$ de classe C^∞ tais que $\mathcal{U} \supset X$ e $(\forall x \in X) \|g(x) - f(x)\| < \epsilon(x)$.

14-) (INTEGRAIS IMPRÓPRIAS) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ limitada numa vizinhança de cada ponto de $\mathcal{U}$ e tal que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tenha medida nula.

1. Se f tiver suporte compacto, tomamos $K \subset \mathcal{U}$ compacto J-mensurável tal que $\operatorname{supp} f \subset K$ (por exemplo, basta cobrir $\operatorname{supp} f$ com uma coleção finita de cubos fechados contidos em $\mathcal{U}$) e definimos $\int_{\mathcal{U}} f \doteq \int_K f$. Verifique que esta é uma boa definição, i.e. f é Riemann-integrável em K e a integral independe do compacto J-mensurável tomado, i.e. se K' for outro compacto J-mensurável tal que $\operatorname{supp} f \subset K'$, tem-se $\int_{K'} f = \int_K f$.

2. No caso geral, diz-se que f é *integrável* se, dada $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ partição da unidade C^∞ em $\mathcal{U}$ tal que $(\forall i \in \mathbb{N}) \operatorname{supp} \xi_i$ compacto, pondo $(\forall i \in \mathbb{N}) f_i \doteq \xi_i f$, a série $\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} |f_i|$ for convergente, onde $\int_{\mathcal{U}} |f_i|$ definida como no item anterior. Em caso afirmativo, a série $\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} f_i$ é absolutamente convergente, e definimos $\int_{\mathcal{U}} f \doteq \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} f_i$. Mostre que estas definições independem da partição da unidade tomada, i.e. se $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ for outra partição da unidade C^∞ em $\mathcal{U}$ tal que $(\forall i \in \mathbb{N}) \operatorname{supp} \eta_i$ compacto, a série $\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} |\xi_i f|$ é convergente se, e somente se, $\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} |\eta_i f|$ o for; em caso afirmativo, tem-se $\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} \xi_i f = \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} \eta_i f$. SUGESTÃO: Verifique que f é integrável com respeito a $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, a série dupla $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} |\xi_i \eta_j f|$ for convergente, e que f é integrável com respeito a $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, a série dupla $\sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} |\xi_i \eta_j f|$ for convergente. Agora use o fato de que, se uma série dupla de números reais for absolutamente convergente, então podemos inverter a ordem do somatório (fica como exercício escrever precisamente o que isto significa). A seguir, se f for integrável, use um argumento similar para verificar que $\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} \xi_i f = \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{U}} \eta_i f$.

3. Com a notação dos ítens anteriores:

   (a) Mostre que existe uma exaustão $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{U}$ formada por compactos J-mensuráveis.

   (b) Tomando-se uma exaustão $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ como no ítem anterior, mostre que f é integrável em $\mathcal{U}$ se, e somente, se, existir $\lim_{i \to \infty} \int_{K_i} |f|$. Em caso afirmativo, também existe $\lim_{i \to \infty} \int_{K_i} f$, e o referido limite coincide com $\int_{\mathcal{U}} f$. SUGESTÃO: Tome $f^+, f^- : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definidas por, respectivamente, $f^+(x) = f(x)$ se $f(x) > 0$ e 0 caso contrário, $f^-(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$ e 0 caso contrário. Então $f^+, f^- \geqslant 0$, são contínuas exceto num conjunto de medida nula e limitadas numa vizinhança de cada ponto de $\mathcal{U}$, e $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Assim, f é integrável se, e somente se, f^+ e f^- o forem, e em caso afirmativo $\int_{\mathcal{U}} f = \int_{\mathcal{U}} f^+ - \int_{\mathcal{U}} f^-$. É suficiente, pois, verificar a afirmação para o caso em que $f \geqslant 0$.

4. Com a notação dos ítens anteriores, mostre que, se f e $\mathcal{U}$ forem ambos limitados, então f é integrável em $\mathcal{U}$. Além disso, se $\mathcal{U}$ for J-mensurável, a integral de Riemann imprópria de f em $\mathcal{U}$ (i.e. a integral definida nos ítens anteriores) coincide com a integral de Riemann usual. SUGESTÃO: Para verificar a última afirmação, use a questão **5-)**.

15-) (TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS, I) Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ difeomorfismo C^1 e $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ integrável em $\mathcal{V}$. Então $(g \circ f)|\det f'|$ é integrável em $\mathcal{U}$ e $\int_{\mathcal{V}} g = \int_{\mathcal{U}} (g \circ f)|\det f'|$.

Observação: O mesmo enunciado vale se supusermos f homeomorfismo de classe C^1. Com efeito, denotando por $S \doteq \{x \in \mathcal{U} \mid \det f'(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos singulares de f, tem-se: (i) S é fechado em $\mathcal{U}$ e $f(S)$ é fechado em $\mathcal{V}$, e $\int_{\mathcal{V}\setminus f(S)} g = \int_{\mathcal{U}\setminus S}(g \circ f)|\det f'|$ pelo enunciado acima; (ii) o fato de ser S um fechado em $\mathcal{U}$ no qual $(g \circ f)|\det f'|$ se anula implica que $\int_{\mathcal{U}\setminus S}(g \circ f)|\det f'| = \int_{\mathcal{U}}(g \circ f)|\det f'|$ (para verificar isto, deve-se mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança aberta W de S tal que $\left|\int_W (g \circ f)|\det f'|\right| < \epsilon$ e depois usar uma partição da unidade conveniente); (iii) $f(S)$ é fechado em $\mathcal{V}$ e tem medida nula (pelo teorema de Sard, conforme a questão **6-)**), e isto implica que $\int_{\mathcal{V}\setminus f(S)} g = \int_{\mathcal{V}} g$ (para verificar isto, deve-se mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança aberta W de $f(S)$ tal que $|\int_W g| < \epsilon$ e depois usar uma partição da unidade conveniente).

16-) (Teorema de Mudança de Variáveis, II) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, $X \subset \mathcal{U}$ J-mensurável tal que $\overline{X} \subset \mathcal{U}$. Suponha que a restrição de f ao interior de $\overline{X}$ seja difeomorfismo sobre sua imagem. Mostre que:

1. $f(X)$ é J-mensurável. Sugestão: Verifique que $\partial f(X) \subset f(\partial X)$.
2. Para toda $g : f(X) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrável, $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $\int_{f(X)} g = \int_X (g \circ f)|\det f'|$. Sugestão: Conclua, a partir da questão anterior, que vale a igualdade com $\overset{\circ}{X}$ no lugar de X.

17-) (integral usando coordenadas polares) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r,\theta) \doteq (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $\mathcal{U} \doteq \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ e } 0 < \theta < 2\pi\}$, de modo que f é de classe C^∞ e $f|_{\mathcal{U}}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Conclua, a partir da questão anterior, que, para todo $X \subset \overline{\mathcal{U}}$ J-mensurável, $f(X)$ é J-mensurável e, para toda $g : f(X) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrável, tem-se $\int_{f(X)} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Aplique isto para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Sugestão: Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) \doteq e^{-(x^2+y^2)}$. Escreva a integral imprópria $\int_{\mathbb{R}^2} g$ de duas maneiras: (1) para $a > 0$ fixo, escreva a integral de g em $[-a,a] \times [-a,a]$ usando o teorema de Fubini e use uma exaustão conveniente de $\mathbb{R}^2$; para $\rho > 0$ fixo, tome $X = [0,\rho] \times [0, 2\pi]$ e use coordenadas polares para calcular a integral de g no círculo fechado de raio ρ centrado na origem, e a seguir tome uma exaustão conveniente.

18-) (volume da bola de raio r em $\mathbb{R}^n$) Sejam $B_n(r)$ a bola de raio r centrada na origem de $\mathbb{R}^n$ e $V_n(r)$ o seu volume. Calcule $V_n(r)$. Sugestão: Vide sugestão na página 598 do *Undergraduate Analysis* do Lang.