MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010
Prof. Gláucio Terra

7^a Lista de Exercícios - Formas Diferenciais

Nas questões 1 a 7, E, F, G e H são espaços vetoriais; E^* denota o dual de E. $\phi : \mathsf{F} \times \mathsf{G} \to \mathsf{H}$ é uma aplicação bilinear.

1-)

1. Sejam $\phi \in \mathsf{A}_k(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ e $v_1, \ldots, v_k \in \mathsf{E}$ linearmente dependentes. Então $\phi(v_1, \ldots, v_k) = 0$.
2. Sejam $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathsf{E}^*$. Então $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k = 0$ se, e somente se, $\theta_1, \ldots, \theta_k$ forem linearmente dependentes.

Notação. Fixaremos a seguinte notação:

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, $I_n \doteq \{1, \ldots, n\}$. Dados $1 \leqslant r \leqslant n$, $I_{n,r} \doteq \{J : I_r \to I_n \mid J_1 < \cdots < J_r\}$.
2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $a = (a^i_j) \in \mathsf{M}(m, n, \mathbb{R})$ uma matriz $m \times n$. Dados $r \leqslant \min\{m, n\}$, $J \in I_{m,r}$ e $K \in I_{n,r}$, denotaremos por a^J_K a submatriz $r \times r$ de a cujas linhas têm índices em J e cujas colunas têm índices em K, i.e. a matriz $(a^{J_i}_{K_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$. Se $r = m$, abreviaremos $a_K \doteq a^J_K$ e, se $r = n$, $a^J \doteq a^J_K$.
3. Sejam $e^1, \ldots, e^n \in \mathsf{E}^*$ e $J \in I_{n,r}$. Pomos $e^J \doteq e^{J_1} \wedge \cdots \wedge e^{J_r}$. Assim, se $(e^1, \ldots, e^n)$ for uma base de E^*, então $\{e^J \mid J \in I_{n,r}\}$ é uma base de $\mathsf{A}_r(\mathsf{E}, \mathbb{R})$.

2-) Seja $(e^1, \ldots, e^n)$ uma base de E^*.

1. Se $r \leqslant n$, $f^1, \ldots, f^r \in \mathsf{E}^*$ e (para $1 \leqslant i \leqslant r$) $f^i = \sum_{j=1}^n a^i_j e^j$, então $f^1 \wedge \cdots \wedge f^r = \sum_{J \in I_{n,r}} \det(a_J) e^J$.
2. Se $(f^1, \ldots, f^n)$ for outra base de E^* e (para $1 \leqslant i \leqslant n$) $f^i = \sum_{j=1}^n a^i_j e^j$, então, para $r \leqslant n$, $J \in I_{n,r}$, tem-se $f^J = \sum_{K \in I_{n,r}} \det(a^J_K) e^K$. Em particular, se $r = n$, $f^1 \wedge \cdots \wedge f^n = \det(a) e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$.

3-) Sejam $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ base de E e $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ base de F, com respectivas bases duais $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^m)$ e $\mathcal{F}^* = (f^1, \ldots, f^n)$. Seja $A \in \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ e $a = (a^i_j)$ a matriz de A com respeito às bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, i.e. tal que $(\forall 1 \leqslant j \leqslant m) A \cdot e_j = \sum_{i=1}^n a^i_j f_i$. Então a matriz de $A^* : \mathsf{F}^* \to \mathsf{E}^*$ é a transposta de a, i.e. $(\forall 1 \leqslant j \leqslant n) A^* \cdot f^j = \sum_{i=1}^m a^j_i e^i$. Verifique que, dados $1 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$ e $J \in I_{n,r}$, tem-se $A^* f^J = \sum_{K \in I_{m,r}} \det(a^J_K) e^K$. Conclua que o posto de $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é o maior inteiro r para o qual $f^* : \mathsf{A}_r(\mathsf{F}, \mathbb{R}) \to \mathsf{A}_r(\mathsf{E}, \mathbb{R})$ é não-nula.

4-) (IDENTIDADE DE LAGRANGE) Seja $a = (a^i_j) \in \mathsf{M}(m, r, \mathbb{R})$, com $m \geqslant r$, e a^* a sua transposta. Mostre que $\det(a^* a) = \sum_{J \in I_{m,r}} \det(a^J)^2$. SUGESTÃO: Sejam $(\forall 1 \leqslant j \leqslant r) v_j = \sum_{i=1}^m a^i_j e_i$ as colunas de a, e defina $(\forall 1 \leqslant i \leqslant r) f^i \doteq \sum_{j=1}^m a^j_i e^j$. Calcule $f^1 \wedge \cdots \wedge f^r(v_1, \ldots, v_r)$.

5-) (ELEMENTO DE VOLUME) Seja E de dimensão finita n, orientado e munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1. Sejam $(e_1,\dots,e_n)$ e $(f_1,\dots,f_n)$ bases ortonormais positivas, com respectivas bases duais $(e^1,\dots,e^n)$ e $(f^1,\dots,f^n)$. Mostre que $e^1\wedge\cdots\wedge e^n = f^1\wedge\cdots\wedge f^n$.

2. Com a notação do item anterior, defina $\omega\in\mathsf{A}_n(\mathsf{E},\mathbb{R})$ por $\omega \doteq e^1\wedge\cdots\wedge e^n$. Sejam $v_1,\dots,v_n\in\mathsf{E}$ e $g\doteq(\langle v_i,v_j\rangle)_{i,j}\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ a matriz de Gramm. Se $a=(a^i_j)\in\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ é tal que $(\forall 1\leqslant j\leqslant n)v_j=\sum_{i=1}^n a^i_j e_i$, verifique que $g=a^*\cdot a$, donde $\det g=(\det a)^2\geqslant 0$ e $\det g=0$ se, e somente se, $v_1,\dots,v_n$ forem linearmente dependentes. Conclua que $\omega(v_1,\dots,v_n)=\pm\sqrt{\det g}$, sendo o sinal positivo se $(v_1,\dots,v_n)$ for uma base positiva de E e negativo caso contrário.

OBSERVAÇÃO: Com a notação acima, no caso $\mathsf{E}=\mathbb{R}^n$, $\omega(v_1,\dots,v_n)$ é o *volume com sinal* do paralelepípedo gerado pelos vetores $v_1,\dots,v_n$.

6-) (PRODUTO VETORIAL) Sejam $v_1,\dots,v_n\in\mathbb{R}^{n+1}$. Definimos o produto vetorial $v_1\times\cdots\times v_n$ como sendo o único vetor $v\in\mathbb{R}^{n+1}$ tal que, $(\forall x\in\mathbb{R})\langle x,v\rangle=\det(x,v_1,\dots,v_n)$, onde $(x,v_1,\dots,v_n)$ denota a matriz cujas colunas são as matrizes das coordenadas dos vetores aí indicados com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Verifique que, se $a=(a^i_j)\in\mathsf{M}(n+1,n,\mathbb{R})$ é tal que $(\forall 1\leqslant j\leqslant n)v_j=\sum_{i=1}^{n+1}a^i_j e_i$, então $v_1\times\cdots\times v_n=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\det a_{(i)}e_i$, onde $a_{(i)}$ denota a submatriz de a obtida omitindo-se a sua i-ésima linha.

2. Verifique que o produto vetorial é caracterizado pelas seguintes propriedades:

   (a) $v_1\times\cdots\times v_n\neq 0$ se, e somente se, $v_1,\dots,v_n$ forem linearmente independentes.

   (b) $v_1\times\cdots\times v_n$ é perpendicular a cada v_i.

   (c) $\|v_1\times\cdots\times v_n\|$ é o volume n-dimensional (sem sinal) do paralelepípedo gerado por estes vetores.

   (d) $\det(v_1\times\cdots\times v_n,v_1,\dots,v_n)>0$ se $v_1,\dots,v_n$ forem linearmente independentes.

7-) (PRODUTO INTERIOR)

DEFINIÇÃO 1 *Dados* $v\in\mathsf{E}$ *e* $p\in\mathbb{N}$, *definimos* $\mathsf{A}_{-1}(\mathsf{E},\mathsf{F})\doteq\{0\}$ *e* $\mathrm{i}_v:\mathsf{A}_p(\mathsf{E},\mathsf{F})\to\mathsf{A}_{p-1}(\mathsf{E},\mathsf{F})$ *por* $\mathrm{i}_v\omega=0$ *se* $p=0$ *e* $\mathrm{i}_v\omega(\xi)=\omega(v,\xi)$ *se* $p>0$. *Esta transformação linear chama-se* produto interior *por* v.

Verifique que:

1. $\mathrm{i}_v^2=0$.

2. Se $\omega\in\mathsf{A}_p(\mathsf{E},\mathsf{F})$ e $\eta\in\mathsf{A}_q(\mathsf{E},\mathsf{G})$, então $\mathrm{i}_v(\omega\wedge_\phi\eta)=\mathrm{i}_v\omega\wedge_\phi\eta+(-1)^p\omega\wedge_\phi\mathrm{i}_v\eta$.

8-) Sejam M^m uma superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}+1}$ e $\phi:\mathcal{U}_0\to\mathcal{U},\psi:\mathcal{U}_1\to\mathcal{U}\in\mathcal{A}(\mathsf{M})$. Para $1\leqslant r\leqslant m$, as cartas ϕ e ψ induzem, respectivamente, r-formas $\{\mathrm{d}x^I\mid I\in I_{m,r}\}\subset\Omega^{(k)}_r(\mathcal{U},\mathbb{R})$ e $\{\mathrm{d}y^I\mid I\in I_{m,r}\}\subset\Omega^{(k)}_r(\mathcal{U},\mathbb{R})$, de forma que, para todo $p\in\mathcal{U}$, $\{\mathrm{d}x^I(p)\mid I\in I_{m,r}\}$ e $\{\mathrm{d}y^I(p)\mid I\in I_{m,r}\}$ são bases de $\mathsf{A}_r(\mathsf{T}_p\mathsf{M},\mathbb{R})$. Verifique que, para todo $J\in I_{m,r}$:

$$\mathrm{d}y^J=\sum_{K\in I_{m,r}}\det\Big(\frac{\partial y^J}{\partial x^K}\Big)\mathrm{d}x^K,$$

onde $(\forall p \in \mathcal{U})\big(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\big)_{i,j}$ denota a matriz jacobiana $\mathsf{J}(\psi^{-1}\circ\phi)\big(\phi^{-1}(p)\big)$. Em particular, dada ω r-forma em $\mathcal{U}$ a valores no espaço de Banach F, se $\omega = \sum_{J\in I_{m,r}} a_J \mathrm{d}x^J = \sum_{K\in I_{m,r}} b_K \mathrm{d}y^K$, onde $a_J, b_K : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$, então $a_J = \sum_{K\in I_{m,r}} b_K \det \frac{\partial y^K}{\partial x^J}$.

Observação: Com a notação acima, isto mostra que $a_J \in \mathsf{C}^\mathsf{k}$ para todo $J \in I_{m,r}$ se, e somente se, $b_K \in \mathsf{C}^\mathsf{k}$ para todo $K \in I_{m,r}$. Ou seja, a definição de r-forma de classe C^k feita em aula é independente da carta tomada.

9-) Sejam M^m e N^n superfícies $\mathsf{C}^{\mathsf{k}+1}$, $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}+1}$, $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U} \in \mathcal{A}(\mathsf{M})$ e $\psi : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V} \in \mathcal{A}(\mathsf{N})$ tais que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Para $1 \leqslant r \leqslant \min\{m,n\}$, as cartas ϕ e ψ induzem, respectivamente, r-formas $\{\mathrm{d}x^I \mid I \in I_{m,r}\} \subset \Omega_r^{(k)}(\mathcal{U},\mathbb{R})$ e $\{\mathrm{d}y^I \mid I \in I_{n,r}\} \subset \Omega_r^{(k)}(\mathcal{V},\mathbb{R})$, como na questão anterior. Verifique que $f^*\mathrm{d}y^J = \sum_{K\in I_{m,r}} \det\big(\frac{\partial y^J}{\partial x^K}\big)\mathrm{d}x^K$, onde $(\forall p \in \mathcal{U})\big(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\big)_{i,j}$ denota a matriz jacobiana $\mathsf{J}(\psi^{-1}\circ f\circ\phi)\big(\phi^{-1}(p)\big)$. Portanto, dados F espaço de Banach e $\omega = \sum_{J\in I_{n,r}} a_J \mathrm{d}y^J \in \Omega_r^{(k)}(\mathcal{V},\mathsf{F})$, onde $a_J : \mathcal{V} \to \mathsf{F} \in \mathsf{C}^\mathsf{k}$, tem-se $f^*\omega = \sum_{J\in I_{n,r}} \sum_{K\in I_{m,r}} (a_J\circ f)\det\big(\frac{\partial y^J}{\partial x^K}\big)\mathrm{d}x^K \in \Omega_r^{(k)}(\mathcal{U},\mathsf{F})$.

10-) Sejam E, F espaços de Banach, $\mathcal{U} \subset \mathsf{E}$ aberto e $\omega \in \Omega_r^{(k\geqslant 1)}(\mathcal{U},\mathsf{F})$. Dado $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ aberto, mostre que $(\mathrm{d}\omega)|_{\mathcal{V}} = \mathrm{d}(\omega|_{\mathcal{V}})$. O mesmo vale para formas diferenciais em abertos de uma superfície. Sugestão: A restrição de uma forma diferencial a um aberto coincide com o seu pullback pela inclusão.

11-) Sejam M^m superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}+1}$, F espaço de Banach e $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U} \in \mathcal{A}(\mathsf{M})$.

1. Dada $f : \mathsf{M} \to \mathsf{F}$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}+1}$, verifique que, para todo $x \in \mathsf{M}$, $\mathrm{d}f(x) = f'(x) : \mathsf{T}_x\mathsf{M} \to \mathsf{F}$.
2. Seja $x^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ dada por $x^i \doteq e^i \circ \phi^{-1}$, onde e^i é o i-ésimo vetor da base dual à base canônica de $\mathbb{R}^m$. Verifique que, para todo $p \in \mathcal{U}$, a derivada exterior de x^i em p coincide com o i-ésimo vetor da base dual à base de $\mathsf{T}_p\mathsf{M}$ induzida por ϕ.
3. Com a notação dos ítens anteriores, verifique que, em $\mathcal{U}$, $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$, onde $\frac{\partial f}{\partial x^i} : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$ é dada por $(\forall p \in \mathcal{U})\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = f'(p)\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\big(\phi^{-1}(p)\big) \in \mathsf{F}$. Conclua que, se $\omega \in \Omega_r^{(k)}(\mathsf{M},\mathsf{F})$ for tal que $\omega|_{\mathcal{U}} = \sum_{J\in I_{m,r}} a_J\mathrm{d}x^J$, onde $a_J : \mathcal{U} \to \mathsf{F} \in \mathsf{C}^\mathsf{k}$, então $\mathrm{d}\omega|_{\mathcal{U}} = \sum_{J\in I_{m,r}} \mathrm{d}a_J \wedge \mathrm{d}x^J = \sum_{J\in I_{m,r}}\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_J}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^J$.

12-) Seja ω uma forma diferencial de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ definida num aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Se ω se anula nos vetores tangentes a uma superfície $\mathsf{M} \subset \mathcal{U}$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 2}$, o mesmo ocorre com $\mathrm{d}\omega$.

13-) (forma elemento de volume de uma superfície orientada)

1. Seja $\mathsf{M}^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$. Um *campo de vetores* em M é uma aplicação $X : \mathsf{M} \to \mathbb{R}^n$ tal que $(\forall p \in \mathsf{M})X(p) \in \mathsf{T}_p\mathsf{M}$. Um *referencial móvel* num aberto $\mathcal{U} \subset \mathsf{M}$ é uma m-upla $(X_1,\ldots,X_m)$ de campos de vetores em $\mathcal{U}$ tal que, para todo $p \in \mathcal{U}$, $\big(X_1(p),\ldots,X_m(p)\big)$ é base de $\mathsf{T}_p\mathsf{M}$. O referencial móvel diz-se *ortonormal* se a base correspondente em cada espaço tangente for ortonormal. Mostre que, para todo ponto p de M, existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p e um referencial móvel ortonormal de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ em $\mathcal{U}$; além disso, se M for uma superfície orientada, o referencial em questão pode ser tomado *positivo*, i.e. tal que a base correspondente em cada espaço tangente é positiva.

2. Com a notação do item anterior, seja $(X_1,\dots,X_m)$ um referencial móvel de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ num aberto $\mathcal{U}\subset\mathsf{M}$. Defina 1-formas $\theta^1,\dots,\theta^m$ em $\mathcal{U}$ pela condição de que, para todo $p\in\mathcal{U}$, $\big(\theta^1(p),\dots,\theta^m(p)\big)$ seja a base dual de $\big(X_1(p),\dots,X_m(p)\big)$, i.e. tal que $\theta^i(p)\cdot X_j(p)=\delta^i_j$, para $1\leqslant i,j\leqslant m$. Mostre que $(\forall 1\leqslant i\leqslant m)\theta^i\in\Omega_1^{(k-1)}(\mathcal{U},\mathbb{R})$. $(\theta^1,\dots,\theta^m)$ chama-se *co-referencial dual* de $(X_1,\dots,X_m)$.

3. Com a notação dos ítens anteriores, seja M^m superfície orientada, $(X_1,\dots,X_m)$ e $(Y_1,\dots,Y_m)$ referenciais ortonormais positivos de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ em abertos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de M, respectivamente, e $(\theta^1,\dots,\theta^m)$, $(\eta^1,\dots,\eta^m)$ os respectivos co-referenciais duais. Verifique que, se $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\neq\emptyset$, então $\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m=\eta^1\wedge\cdots\wedge\eta^m$ em $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. Assim, podemos definir $\omega\in\Omega_m^{(k-1)}(\mathsf{M},\mathbb{R})$ por $(\forall p\in\mathsf{M})\omega(p)=\theta^1(p)\wedge\cdots\wedge\theta^m(p)$ se $(\theta^1,\cdots,\theta^m)$ for o co-referencial dual de um referencial ortonormal positivo de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ numa vizinhança aberta de p. A m-forma ω chama-se *forma elemento de volume da superfície orientada* M. Em particular, se M for aberta em $\mathbb{R}^m$, munido da orientação canônica, e $(\forall 1\leqslant i\leqslant m)x^i$ for a restrição a M do i-ésimo vetor da base dual à base canônica de $\mathbb{R}^m$, então $\omega=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$.

4. Com a notação dos ítens anteriores, sejam M^m superfície orientada e $\omega\in\Omega_m^{(k-1)}(\mathsf{M},\mathbb{R})$ a forma elemento de volume de M. Sejam $\phi:\mathcal{U}_0\to\mathcal{U}$ carta positiva de M, $(\partial_1,\dots,\partial_m)$ o referencial móvel em $\mathcal{U}$ induzido por ϕ, e $(\mathrm{d}x^1,\dots,\mathrm{d}x^m)$ o co-referencial dual. Então $\omega|_{\mathcal{U}}=\sqrt{\det(g)}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$, onde $g=(g_{ij})_{i,j}:\mathcal{U}\to\mathsf{M}(m,\mathbb{R})$ é a aplicação de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ dada por $(\forall 1\leqslant i,j\leqslant m)g_{ij}=\langle\partial_i,\partial_j\rangle$. Em particular, se $m=2$, pondo $E\doteq\langle\partial_1,\partial_1\rangle$, $G\doteq\langle\partial_2,\partial_2\rangle$ e $F\doteq\langle\partial_1,\partial_2\rangle$, obtém-se $\omega|_{\mathcal{U}}=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2$, como nos livros de Cálculo.

14-) (FORMA ELEMENTO DE VOLUME DE UMA HIPERFÍCIE ORIENTADA) Com a notação da questão anterior, seja $\mathsf{M}^m\subset\mathbb{R}^{m+1}$ uma hiperfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$, orientada pelo campo normal unitário $\nu:\mathsf{M}\to\mathbb{R}^{m+1}$ (i.e. tal que $\forall p\in\mathsf{M},(v_1,\dots,v_m)$ é base positiva de $\mathsf{T}_p\mathsf{M}$ se, e somente se, $\big(\nu(p),v_1,\dots,v_m\big)$ é base positiva de $\mathbb{R}^{m+1}$).

1. Verifique que a forma elemento de volume ω de M é dada por $\omega=\mathrm{i}_\nu(\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m+1})$, i.e. $(\forall p\in\mathsf{M})\omega(p)=\mathrm{i}_{\nu(p)}(e^1\wedge\cdots\wedge e^{m+1})$. Assim, se ν tiver funções coordenadas $(\nu_1,\dots,\nu_{m+1})$ com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^{m+1}$, tem-se:

$$\omega=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}\nu_i\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m+1}.$$

Em particular, se $\mathsf{M}=f^{-1}(c)$, onde f é uma função de classe C^{k} definida num aberto de $\mathbb{R}^{m+1}$ e $c\in\mathbb{R}$ valor regular de f, podemos tomar $\nu=\text{grad }f/\|\text{grad }f\|$, de modo que:

$$\omega=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}\frac{\mathrm{D}_if}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m+1}(\mathrm{D}_jf)^2}}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m+1}.$$

2. Verifique que gráficos de funções de classe C^{k} definidas em abertos de $\mathbb{R}^m$ são casos particulares da situação descrita no item anterior; escreva uma fórmula para a forma elemento de volume correspondente.

3. Sejam $\phi:\mathcal{U}_0\to\mathcal{U}\in\mathsf{A}(\mathsf{M})$ uma carta positiva, $(\partial_1,\dots,\partial_m)$ o referencial móvel em $\mathcal{U}$ induzido por ϕ, e $(\mathrm{d}x^1,\dots,\mathrm{d}x^m)$ o co-referencial dual. Então $\omega|_{\mathcal{U}}=\|\partial_1\times\cdots\times\partial_m\|\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$.

15-) (FORMA ELEMENTO DE ÂNGULO SÓLIDO EM $\mathbb{R}^{m+1}$) Sejam $\mathsf{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ a esfera unitária, munida da orientação induzida pela normal unitária externa (i.e. externa olhando S^m como bordo da bola unitária), ω a forma elemento de volume de S^m e $\pi : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \to \mathsf{S}^m$ a projeção radial, i.e. dada por $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. A forma $\alpha \doteq \pi^*\omega \in \Omega_m^\infty(\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ chama-se forma elemento de ângulo sólido de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$. Verifique que, para todo $x \in \mathbb{R}^{m+1}$:

$$\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} x^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m+1}.$$

Em particular, para $m = 1$, obtém-se $\alpha(x, y) = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, a forma elemento de ângulo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

16-) (LEMA DE POINCARÉ) Sejam E, F espaços de Banach, $\mathcal{U} \subset \mathsf{E}$ aberto e $\omega \in \Omega_p^{(n)}(\mathcal{U}, \mathsf{F})$, $n, p \geqslant 1$.

1. Se existir $\alpha \in \Omega_{p-1}^{(2)}(\mathcal{U}, \mathsf{F})$ tal que $\mathrm{d}\alpha = \omega$, então $\mathrm{d}\omega = 0$.
2. Suponha que exista $p \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U}$ seja *estrelado com respeito a p*, i.e. tal que, para todo $x \in \mathcal{U}$, $[p, x] \subset \mathcal{U}$. Defina, para todo $r, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $K : \Omega_r^{(n)}(\mathcal{U}, \mathsf{F}) \to \Omega_{r-1}^{(n)}(\mathcal{U}, \mathsf{F})$ por $K\alpha = 0$ se $r = 0$ e, se $r > 0$, $\forall x \in \mathcal{U}$:

$$K\alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_{r-1}) \doteq \int_0^1 t^{r-1} \alpha\big(p + t(x - p); x - p, \xi_1, \ldots, \xi_{r-1}\big)\, \mathrm{d}t$$

Verifique que, para toda $\alpha \in \Omega_r^{(n)}(\mathcal{U}, \mathsf{F})$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}K\alpha + K\mathrm{d}\alpha = \alpha & \text{se } r > 0 \\ K\mathrm{d}\alpha = \alpha - \alpha(p) & \text{se } r = 0, \end{cases}$$

onde, se $r = 0$, $\alpha(p)$ denota a aplicação constante e igual a $\alpha(p)$. Conclua que, se $\mathrm{d}\omega = 0$, existe $\alpha \in \Omega_{p-1}^{(n)}(\mathcal{U}, \mathsf{F})$ tal que $\mathrm{d}\alpha = \omega$.

17-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^∞. Definamos as formas diferenciais $\omega_F^1 \in \Omega_1^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ e $\omega_F^2 \in \Omega_2^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ por:

$$\omega_F^1 \doteq F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_2\mathrm{d}z$$
$$\omega_F^2 \doteq F_1\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - F_2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + F_3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Então:

1. (a) Para toda $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathcal{U})$, $\mathrm{d}f = \omega_{\mathrm{grad}\, f}^1$;
   (b) $\mathrm{d}\omega_F^1 = \omega_{\mathrm{rot}\, F}^2$;
   (c) $\mathrm{d}\omega_F^2 = (\mathrm{div}\, F)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.
2. Conclua, a partir do item anterior, que:
   (a) Para toda $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathcal{U})$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$.
   (b) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, F = 0$.
3. Mostre que, se $\mathcal{U}$ for estrelado:
   (a) se $\mathrm{rot}\, F = 0$, existe $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathcal{U})$ tal que $\mathrm{grad}\, f = F$.
   (b) se $\mathrm{div}\, F = 0$, existe $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ tal que $\mathrm{rot}\, X = F$.