MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010
Prof. Gláucio Terra

6^a Lista de Exercícios - Subvariedades Mergulhadas em $\mathbb{R}^n$

1-) Quais dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ abaixo descritos são subvariedades?

(i) subespaços vetoriais;
(ii) em $\mathbb{R}^3$, $\mathsf{M} \doteq f^{-1}(0)$, onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1)^2$.
(iii) em $\mathbb{R}^2$, $\mathsf{M} \doteq f^{-1}(0)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$.
(iv) em $\mathbb{R}^2$, $\mathsf{M} \doteq f^{-1}(1)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$.

2-) Seja $\mathsf{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = (x-1)^3\}$.

(i) Ache, caso exista, o ponto de M mais próximo da origem.
(ii) Idem para $\mathsf{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1\}$.

3-)

1. Mostre que o cilindro $\mathsf{S}^1 \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^3$, onde $\mathsf{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ é o círculo de raio unitário centrado na origem, é uma subvariedade; apresente cartas cujas imagens recubram o cilindro.
2. Mais geralmente, se $\mathsf{M}^m \subset \mathbb{R}^p$ e $\mathsf{N}^n \subset \mathbb{R}^q$ forem subvariedades de classe C^k, defina $\mathcal{A}(\mathsf{M}\times\mathsf{N}) \doteq \{\phi\times\psi : \mathcal{U}_0\times\mathcal{V}_0 \to \mathcal{U}\times\mathcal{V} \mid \phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U} \in \mathcal{A}(\mathsf{M}) \text{ e } \psi : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V} \in \mathcal{A}(\mathsf{N})\}$. Verifique que $\mathcal{A}(\mathsf{M}\times\mathsf{N})$ é um atlas de dimensão $m+n$ e classe C^k (chamado *atlas produto*) para $\mathsf{M}\times\mathsf{N} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, de modo que $\mathsf{M}\times\mathsf{N}$ admite uma estrutura canônica de subvariedade de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$.

4-) Idem para o toro em $\mathbb{R}^3$ gerado pela rotação do círculo $(x-a)^2+z^2 = r^2$, $0 < r < a$, em torno do eixo Oz.

5-) Sejam $\mathsf{M},\mathsf{N} \subset \mathbb{R}^3$ subvariedades de dimensão 2, dadas por $\mathsf{M} = F^{-1}(0)$ e $\mathsf{N} = G^{-1}(0)$, onde $F,G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com as condições adequadas. Dê condições suficientes para que $\mathsf{M}\cap\mathsf{N}$ seja subvariedade de dimensão 1.

6-) Dê um exemplo da situação descrita na questão anterior em que $\mathsf{M}\cap\mathsf{N}$ não seja variedade.

7-)

1. Seja $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática, i.e. $Q : x \mapsto \langle T\cdot x, x\rangle$ onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador simétrico. Seja S^{n-1} a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$. Então Q tem pontos de máximo e mínimo em S^{n-1} e todos os pontos de máximo e de mínimo de Q em S^{n-1} são auto-vetores de T; além disso, os valores máximo e mínimo de Q em S^{n-1} são, respectivamente, o maior e o menor auto-valor de T.
2. Conclua, a partir do item anterior, que todo operador simétrico $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ admite uma base ortonormal que o diagonaliza.

8-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$ valor regular de g. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto fora de $\mathsf{M} \doteq g^{-1}(c)$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\|$. Mostre que, se $x_1 \in \mathsf{M}$ for ponto de máximo ou de mínimo local da restrição de f a M, então o segmento que liga x_1 a x_0 é normal a M em x_1.

9-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $c \in \mathbb{R}$ valor regular de g e $\mathsf{M} \doteq g^{-1}(c)$. Sejam $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_0 \neq x_1$ e $[x_0, x_1] \cap \mathsf{M} = \emptyset$, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\| + \|x - x_1\|$.

1. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0, x_1\}$ e calcule o seu campo gradiente.
2. Aplique o item anterior e o teorema dos multiplicadores de Lagrange para concluir que, se $p \in \mathsf{M}$ for ponto crítico da restrição de f a M, então os segmentos $[x_0, p]$, $[x_1, p]$ e a reta normal a M em p são coplanares, e os ângulos formados por tais segmentos com a normal são congruentes.
3. Conclua, a partir do item anterior, a *propriedade reflexiva* das elipses: considere $n = 2$, M uma elipse em $\mathbb{R}^2$ e x_0, x_1 os focos M.

10-) (DESIGUALDADE DE HÖLDER)

1. Sejam $x, y \geqslant 0$ e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mostre que $xy \leqslant \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q$. SUGESTÃO: Pode-se supor, sem perda de generalidade, $xy = 1$. Mostre que o segundo membro assume mínimo na hipérbole $xy = 1$, e encontre tal mínimo.
2. Dados $p > 0$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, defina $\|x\|_p \doteq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$. Então, para $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se a *desigualdade de Hölder*: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$. SUGESTÃO: Use o item anterior para mostrar que $\left\langle \frac{x}{\|x\|_p}, \frac{y}{\|y\|_q} \right\rangle \leqslant 1$.

11-) $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de dimensão m e classe C^k se, e somente se, para todo $p \in \mathsf{M}$, existir Z vizinhança aberta de p em $\mathbb{R}^n$, V aberto em $\mathbb{R}^m$, W vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{R}^{n-m}$ e um difeomorfismo $\phi : Z \to V \times W$ de classe C^k tal que $\phi(Z \cap \mathsf{M}) = V \times \{0\}$.

12-) Toda superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ é, localmente, o gráfico de uma aplicação de classe C^k.

13-) Toda superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ é, localmente, a imagem inversa de um valor regular por uma aplicação de classe C^k.

14-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ e de posto constante r. Dado $c \in f(\mathcal{U})$, mostre que $f^{-1}(c)$ é uma superfície de codimensão r e classe C^k em $\mathbb{R}^n$. Além disso, para todo $p \in f^{-1}(c)$, $\mathsf{T}_p\mathsf{M} = \ker f'(p)$.

15-) Seja $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ no aberto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $f \circ f = f$. Então:

1. f tem posto constante numa vizinhança de $\mathsf{M} \doteq f(\mathcal{U})$.
2. Se $f : \mathcal{U} \to \mathsf{M}$ for uma aplicação aberta (considerando-se em $\mathsf{M} \subset \mathcal{U}$ a topologia relativa), então M é uma superfície de classe C^k cuja dimensão é igual ao posto de f em M.

16-) Seja $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$. Defina $\mathsf{TM} \doteq \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathsf{M}, v \in \mathsf{T}_x\mathsf{M}\}$. Mostre que:

1. TM é uma superfície de dimensão $2m$ e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ em $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2. Se N for outra superfície de classe C^k e $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ for de classe C^k, então $\mathsf{T}f : \mathsf{TM} \to \mathsf{TN}$ dada por $(x, v) \mapsto \big(x, f'(x) \cdot v\big)$ é de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$. Observação: Para que se possa definir $\mathsf{T}f$ como acima, basta que f seja derivável.

3. Se $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ e $g : \mathsf{N} \to \mathsf{Q}$ forem aplicações deriváveis entre superfícies de classe C^k, então a regra da cadeia se escreve: $\mathsf{T}(g \circ f) = \mathsf{T}g \circ \mathsf{T}f$.

Definição 1 *Com a notação acima,* TM *chama-se* fibrado tangente de M *e* $\mathsf{T}f$ *chama-se* aplicação tangente *de* f*.*

17-) Sejam $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 2}$ e $\tau_\mathsf{M} : \mathsf{TM} \to \mathsf{M}$ dada por $(x, v) \mapsto x$. Mostre que:

1. τ_M é uma submersão (i.e. uma aplicação derivável cuja derivada em cada ponto é sobrejetiva) de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$;

2. para todo $x \in \mathsf{M}$, existe $\mathcal{V} \subset \mathsf{M}$ vizinhança aberta de x e um difeomorfismo $\phi : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^m \to \tau_\mathsf{M}^{-1}(\mathcal{V})$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ tal que $\tau_\mathsf{M} \circ \phi = \mathrm{pr}_1$, onde pr_1 denota a projeção no primeiro fator. Além disso, podemos tomar ϕ *linear nas fibras*, i.e. de forma que $(\forall x \in \mathcal{V})\phi_x \doteq \phi(x, \cdot) : \{x\} \times \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m \to \tau_M^{-1}(x) = \mathsf{T}_x\mathsf{M}$ seja linear.

18-) Seja $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 2}$. Defina $\mathsf{TM}^\perp \doteq \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathsf{M}, v \in \mathsf{T}_x\mathsf{M}^\perp\}$. Mostre que:

1. $\mathsf{TM}^\perp$ é uma superfície de dimensão n e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ em $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2. Seja $\pi : \mathsf{TM}^\perp \to \mathsf{M}$ dada por $(x, v) \mapsto x$. Então π é uma submersão de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$; além disso, para todo $x \in \mathsf{M}$, existe $\mathcal{V} \subset \mathsf{M}$ vizinhança aberta de x e um difeomorfismo $\phi : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^{n-m} \to \pi^{-1}(\mathcal{V})$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ tal que $\pi \circ \phi = \mathrm{pr}_1$, onde pr_1 denota a projeção no primeiro fator. Além disso, podemos tomar ϕ *linear nas fibras*, i.e. de forma que $(\forall x \in \mathcal{V})\phi_x \doteq \phi(x, \cdot) : \{x\} \times \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m \to \pi^{-1}(x) = \mathsf{T}_x\mathsf{M}^\perp$ seja linear.

Definição 2 *Com a notação acima,* $\mathsf{TM}^\perp$ *chama-se* fibrado normal de M.

19-) Seja $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 2}$. Defina $\mathsf{T}_1\mathsf{M} \doteq \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathsf{M}, v \in \mathsf{T}_x\mathsf{M}, \|v\| = 1\}$. Mostre que:

1. $\mathsf{T}_1\mathsf{M}$ é uma superfície de dimensão $2m - 1$ e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ em $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2. $\mathsf{T}_1\mathsf{M}$ é compacta se, e somente se, M é compacta.

3. Seja $\pi : \mathsf{T}_1\mathsf{M} \to \mathsf{M}$ dada por $(x, v) \mapsto x$. Então π é uma submersão de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$; além disso, para todo $x \in \mathsf{M}$, existe $\mathcal{V} \subset \mathsf{M}$ vizinhança aberta de x e um difeomorfismo $\phi : \mathcal{V} \times \mathsf{S}^{m-1} \to \pi^{-1}(\mathcal{V})$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ tal que $\pi \circ \phi = \mathrm{pr}_1$, onde pr_1 denota a projeção no primeiro fator.

Definição 3 *Com a notação acima,* $\mathsf{T}_1\mathsf{M}$ *chama-se* fibrado tangente unitário de M.

20-) Seja $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 2}$. Defina $\nu_1\mathsf{M} \doteq \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathsf{M}, v \in \mathsf{T}_x\mathsf{M}^\perp, \|v\| = 1\}$. Mostre que:

1. $\nu_1\mathsf{M}$ é uma superfície de dimensão $n - 1$ e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ em $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2. $\nu_1\mathsf{M}$ é compacta se, e somente se, M é compacta.

3. Seja $\pi : \nu_1\mathsf{M} \to \mathsf{M}$ dada por $(x, v) \mapsto x$. Então π é uma submersão de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$; além disso, para todo $x \in \mathsf{M}$, existe $\mathcal{V} \subset \mathsf{M}$ vizinhança aberta de x e um difeomorfismo $\phi : \mathcal{V} \times \mathsf{S}^{n-m-1} \to \pi^{-1}(\mathcal{V})$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ tal que $\pi \circ \phi = \mathrm{pr}_1$, onde pr_1 denota a projeção no primeiro fator.

Definição 4 *Com a notação acima,* $\nu_1\mathsf{M}$ *chama-se* fibrado normal unitário de M.

21-) Sejam $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 2}$ e $\mathsf{TM}^\perp$ o seu fibrado normal. Defina $f : \mathsf{TM}^\perp \to \mathbb{R}^n$ por $f(x, v) \doteq x + v$.

1. Mostre que f é de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$.

2. Seja $\mathsf{M}_0 \doteq \{(x, v) \in \mathsf{TM}^\perp \mid v = 0\}$. Mostre que f aplica M_0 difeomorficamente sobre M. Além disso, para todo $(x, 0) \in \mathsf{M}_0$, existe uma vizinhança aberta de $(x, 0)$ em $\mathsf{TM}^\perp$ que é aplicada difeomorficamente por f sobre uma vizinhança aberta de $x \in \mathsf{M}$ em $\mathbb{R}^n$. Conclua que, se M é compacta, existe $\epsilon > 0$ tal que a vizinhança aberta $A_\epsilon \doteq \{(x, v) \in \mathsf{TM}^\perp \mid \|v\| < \epsilon\}$ de M_0 em $\mathsf{TM}^\perp$ é aplicada por f difeomorficamente sobre uma vizinhança aberta $V_\epsilon\mathsf{M}$ de M em $\mathbb{R}^n$. Conclua que existe $\pi : V_\epsilon\mathsf{M} \to \mathsf{M}$ submersão $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ tal que $\pi \circ \pi = \pi$ e que, para todo $y \in V_\epsilon\mathsf{M}$, se $x = \pi(y)$, tem-se $y - x \in \mathsf{T}_x\mathsf{M}^\perp$.

Definição 5 *Com a notação acima,* $\pi : V_\epsilon\mathsf{M} \to \mathsf{M}$ *chama-se* vizinhança tubular *de* M.

22-) Sejam M, N superfícies orientáveis, $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ de classe C^1 e $c \in \mathbb{N}$ valor regular de f. Mostre que $f^{-1}(c)$ é uma superfície orientável.

23-)

1. Sejam M, N superfícies orientáveis, munidas de atlas coerentes $\mathcal{A}(\mathsf{M})$ e $\mathcal{A}(\mathsf{N})$, respectivamente. Então o atlas produto $\mathcal{A}(\mathsf{M} \times \mathsf{N})$ em $\mathsf{M} \times \mathsf{N}$ (vide questão **3-)**) é coerente, de modo que a referida superfície também é orientável e duas orientações quaisquer em M e N induzem uma orientação (chamada *orientação produto*) em $\mathsf{M} \times \mathsf{N}$.

2. Com a mesma notação do item anterior, dado $(p, q) \in \mathsf{M} \times \mathsf{N}$, defina as inclusões $i_q : \mathsf{M} \to \mathsf{M} \times \mathsf{N}$ e $j_p : \mathsf{N} \to \mathsf{M} \times \mathsf{N}$ por $x \mapsto (x, p)$ e $y \mapsto (p, y)$, respectivamente. Então i_q e j_p são imersões, de modo que podemos identificar: (i) $\mathsf{T}_p\mathsf{M}$ com o subespaço $i'_q(p) \cdot \mathsf{T}_p\mathsf{M} \subset \mathsf{T}_{(p,q)}(\mathsf{M} \times \mathsf{N})$ e (ii) $\mathsf{T}_q\mathsf{N}$ com o subespaço $j'_p(q) \cdot \mathsf{T}_q\mathsf{N} \subset \mathsf{T}_{(p,q)}(\mathsf{M} \times \mathsf{N})$. Com estas identificações, tem-se a decomposição em soma direta: $\mathsf{T}_{(p,q)}(\mathsf{M} \times \mathsf{N}) = \mathsf{T}_p\mathsf{M} \oplus \mathsf{T}_q\mathsf{N}$.

3. Com a mesma notação do item anterior, sejam M e N orientadas, μ_p a orientação em $\mathsf{T}_p\mathsf{M}$ e η_q a orientação em $\mathsf{T}_q\mathsf{N}$. Então a orientação produto em $\mathsf{T}_{(p,q)}(\mathsf{M} \times \mathsf{N})$ coincide com a orientação produto na soma direta $\mathsf{T}_p\mathsf{M} \oplus \mathsf{T}_q\mathsf{N}$, i.e. se $(v_1, \ldots, v_m)$ e $(w_1, \ldots, w_n)$ forem bases positivas de $\mathsf{T}_p\mathsf{M}$ e $\mathsf{T}_q\mathsf{N}$, respectivamente, então $(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$ é base positiva de $\mathsf{T}_p\mathsf{M} \oplus \mathsf{T}_q\mathsf{N}$.

24-) Sejam M, N superfícies orientadas de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ e de mesma dimensão. Diz-se que um difeomorfismo local $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ é *positivo* (respectivamente, *negativo*) ou que *preserva a orientação* (respectivamente, *inverte a orientação*) se, para todo $x \in \mathsf{M}$, o isomorfismo linear $f'(x) : \mathsf{T}_x\mathsf{M} \to \mathsf{T}_{f(x)}\mathsf{N}$ preserva a orientação (respectivamente, inverte a orientação).

1. Mostre que, se M for conexa e $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ for um difeomorfismo local de classe C^1, então ou f é positiva ou é negativa.

2. Conclua que, se M for uma superfície conexa orientável de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$, então M admite duas orientações. Sugestão: Aplique o item anterior para a identidade $\mathrm{id}_\mathsf{M} : \mathsf{M} \to \mathsf{M}$.

25-) Seja $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 2}$. Mostre que TM é sempre orientável.

26-) Para toda superfície $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 2}$, o fibrado normal $\mathsf{TM}^{\perp}$ é sempre uma superfície orientável, o mesmo ocorrendo com o fibrado normal unitário $\nu_1 \mathsf{M}$.

27-) Seja $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ uma hiperfície (i.e. uma superfície de codimensão 1) conexa de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 1}$. Mostre que o fibrado normal unitário $\nu_1 \mathsf{M}$ é uma superfície conexa se, e somente se, M é não-orientável. Caso M seja orientável, $\nu_1 \mathsf{M}$ tem duas componentes conexas.

28-) Se M é uma superfície de classe C^{k} (sem bordo) e N é uma superfície com bordo de classe C^{k}, então $\mathsf{M} \times \mathsf{N}$ é uma superfície com bordo de classe C^{k} e $\partial(\mathsf{M} \times \mathsf{N}) = \mathsf{M} \times \partial \mathsf{N}$.

29-) Sejam M^m uma superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 1}$ e $f : \mathsf{M} \to \mathbb{R}$ de classe C^{k}. Seja $c \in \mathbb{R}$ valor regular de f. Mostre que $\mathsf{N} \doteq \{x \in \mathsf{M} \mid f(x) \leqslant c\}$ é uma superfície com bordo de dimensão m e classe C^{k}, com $\partial \mathsf{N} = f^{-1}(c)$. SUGESTÃO: Forma Local das Submersões.

30-) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2$. Mostre que todo número real diferente de 0 é valor regular de f e que, se $0 < c < 1$, $\mathsf{M} \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) \leqslant c\}$ é um toro sólido, i.e. uma superfície compacta tridimensional cujo bordo é um toro de dimensão 2.

31-) Sejam M e N superfícies com bordo de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 1}$ e $f : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ um difeomorfismo de classe C^{k}. Mostre que $f(\partial \mathsf{M}) \subset \partial \mathsf{N}$ e que $f : \partial \mathsf{M} \to \partial \mathsf{N}$ é um difeomorfismo de classe C^{k}.

32-)

1. Seja H um semi-espaço em $\mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que v *aponta para fora* de H se $v \notin \mathsf{H}$. Mostre que, se $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ forem abertos nos semi-espaços H e K de $\mathbb{R}^n$, respectivamente, e se $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ for um difeomorfismo $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 1}$, então, para todo $p \in \partial \mathcal{U}$, $f'(p)$ leva vetores que apontam para fora de H em vetores que apontam para fora de K.

2. Seja $\mathsf{M}^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície com bordo de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 1}$. Dado $p \in \partial \mathsf{M}$, diz-se que $v \in \mathsf{T}_p \mathsf{M}$ é um vetor que *aponta para fora* de M se existir uma parametrização $\phi : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V} \in \mathcal{A}_p(\mathsf{M})$, $\mathcal{V}_0$ aberto no semi-espaço H, tal que, pondo $q = \phi^{-1}(p) \in \partial \mathcal{V}_0$, existe $v_0 \in \mathbb{R}^m$ que aponta para fora de H tal que $\phi'(q) \cdot v_0 = v$. Decorre do item anterior que esta condição independe da parametrização ϕ. Mostre que existe um único campo unitário normal a $\partial \mathsf{M}$, de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$, que aponta para fora de M, i.e. $\exists \nu : \partial \mathsf{M} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-1}$ tal que, $\forall p \in \partial \mathsf{M}$, $\nu(p) \in \mathsf{T}_p(\partial \mathsf{M})^{\perp} \subset \mathsf{T}_p \mathsf{M}$, $\|\nu(p)\| = 1$ e $\nu(p)$ aponta para fora de M.

33-) Seja $\mathsf{M}^{m \geqslant 2}$ uma superfície com bordo de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 1}$.

1. Suponha que M seja orientável e escolha uma orientação para M. Considere o conjunto $\mathcal{A}$ formado pelas parametrizações $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ de classe C^{k} para M, tais que (i) $\mathcal{U}_0$ é aberto conexo no semi-espaço $\mathsf{H}_1 \doteq (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \leqslant 0$ e (ii) ϕ é positiva relativamente a orientação de M. Então $\mathcal{A}$ é um atlas positivo para M e $\{\phi|_{\partial \mathcal{V}_0} \mid \phi : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V} \in \mathcal{A}, \partial \mathcal{V}_0 \neq \emptyset\}$ é um atlas coerente em $\partial \mathsf{M}$, o qual define, portanto, uma orientação em $\partial \mathsf{M}$. Deste modo, se M for orientável, $\partial \mathsf{M}$ também o é e toda orientação de M induz uma orientação em $\partial \mathsf{M}$ (a qual se chama *orientação induzida no bordo* de M).

2. Seja M orientada e $\partial \mathsf{M}$ com a orientação induzida, conforme o item anterior. Tome ν campo normal unitário exterior em $\partial \mathsf{M}$, conforme definido na questão anterior. Então, para todo $p \in \partial \mathsf{M}$, $(v_1, \ldots, v_{m-1})$ é uma base positiva de $\mathsf{T}_p(\partial \mathsf{M})$ se, e somente se, $\big(\nu(p), v_1, \ldots, v_{m-1}\big)$ é base positiva de $\mathsf{T}_p \mathsf{M}$.

Observação: Seja $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície orientada com bordo de dimensão 1 e classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k} \geqslant 1}$. Neste caso, $\partial\mathsf{M}$ é um subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$; orientar $\partial\mathsf{M}$ significa, por definição, atribuir um sinal $+$ ou $-$ a cada um de seus pontos. A orientação induzida por M em $\partial\mathsf{M}$ será definida da forma seguinte: seja $x \in \partial\mathsf{M}$ e $v \in \mathsf{T}_x\mathsf{M}$ um vetor que forme uma base positiva deste espaço; então atribuímos $+$ a x se v for exterior (i.e. apontar para fora de M), e atribuímos $-$ a x caso contrário.

Por exemplo: $\mathsf{M} \doteq [0,1] \subset \mathbb{R}$ é uma superfície com bordo de classe C^∞ e dimensão 1. Um atlas para para M é dado por $\mathcal{A} = \{\phi, \psi\}$, onde $\phi : [0,1) \to [0,1)$ e $\psi : (0,1] \to (0,1]$ são a identidade; este atlas é coerente, e define a *orientação canônica* em $[0,1]$. Para todo $p \in \mathsf{M}$, $1 \in \mathsf{T}_p\mathsf{M} = \mathbb{R}$ forma uma base positiva; como este vetor aponta para fora em $1 \in \partial\mathsf{M}$ e para dentro em $0 \in \partial\mathsf{M}$, a orientação induzida em $\partial\mathsf{M} = \{0,1\}$ é $+$ em 1 e $-$ em 0. Escrevemos, para significar isto, $\partial[0,1] = \{+1\} \cup \{-0\}$.

34-)

1. Uma matriz $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ diz-se *não-excepcional* se $(\mathrm{id} + A)$ for inversível, i.e. se $\det(\mathrm{id} + A) \neq 0$. O conjunto $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0 \doteq \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ não-excepcional}\}$ é, portanto, aberto em $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Defina a aplicação $\sharp : \mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0 \to \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ por $A \mapsto A^\sharp \doteq (\mathrm{id} - A)(\mathrm{id} + A)^{-1}$, chamada *transformada de Cayley*. Mostre que a imagem de $\sharp$ está contida em $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0$ e que $\sharp$ é uma involução, i.e. $\forall A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0$, $A^{\sharp\sharp} = A$. Conclua que a transformada de Cayley é um difeomorfismo C^∞ de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0$ sobre si mesmo. Calcule a derivada desta aplicação.

2. Dada $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0$, mostre que A é ortogonal se, e somente se, $A^\sharp$ é anti-simétrica. Como o conjunto das matrizes anti-simétricas é um subespaço E de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$, conclua que a restrição da transformada de Cayley a $\mathsf{E} \cap \mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0$ é uma parametrização ϕ de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ e classe C^∞, cuja imagem é $\mathrm{O}(n) \cap \mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0$, a qual é uma vizinhança aberta de id em $\mathrm{O}(n)$. Agora, para cada $X \in \mathrm{O}(n)$, componha com ϕ a translação à esquerda $L_X : \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, $L_X : Y \mapsto X \cdot Y$, a qual é um difeomorfismo de classe C^∞, de modo a obter uma parametrização $L_X \circ \phi : \mathsf{E} \cap \mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0 \to \mathrm{O}(n) \cap L_X\big(\mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0\big)$ de uma vizinhança aberta de X em $\mathrm{O}(n)$. Obtém-se, assim, um atlas $\{L_X \circ \phi \mid X \in \mathrm{O}(n)\}$ de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ e classe C^∞ para $\mathrm{O}(n)$, de modo que este grupo é uma superfície $\frac{n(n-1)}{2}$ e classe C^∞ em $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Como $\phi(0) = \mathrm{id}$ e $\phi'(0)$ é um múltiplo da identidade, conclua que o espaço tangente a $\mathrm{O}(n)$ em id é o subespaço E de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes anti-simétricas. Finalmente, a multiplicação $\mu : \mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ dada por $(X, Y) \mapsto X \cdot Y$ e a inversão $\mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ dada por $X \mapsto X^{-1}$ são de classe C^∞.

Observação: Pode-se usar a transformada de Cayley para munir vários outros grupos de matrizes de uma estrutura de subvariedade de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Com efeito, a mesma construção feita no item anterior, para se obter um atlas para $\mathrm{O}(n)$ através da transformada de Cayley, pode ser aplicada para qualquer subgrupo G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \doteq \{X \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists X^{-1}\}$ tal que a imagem de $G \cap \mathsf{M}_n(\mathbb{R})^0$ seja um aberto de um subespaço vetorial de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.