MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010
Prof. Gláucio Terra

5^a Lista de Exercícios - Teorema da Função Inversa

1-) Verdadeiro ou falso? Justifique ou dê um contra-exemplo.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injetora $\Rightarrow f$ estritamente crescente ou estritamente decrescente.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injetora, derivável $\Rightarrow f'$ não se anula em $\mathbb{R}$.

2-) Mostre que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e existem intervalos abertos cuja imagem por f não é aberta, então f' se anula em algum ponto.

3-) (perturbação diferenciável da identidade) Sejam E espaço de Banach, $\mathcal{U} \subset \mathsf{E}$ aberto e convexo. Suponha que $\phi : \mathcal{U} \to \mathsf{E}$ seja de classe C^1 e que exista $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$, tal que $(\forall x \in \mathcal{U})\|\phi'(x)\| \leqslant \lambda$. Então $f : \mathcal{U} \to \mathsf{E}$ dada por $x \mapsto x + \phi(x)$ é um difeomorfismo classe C^1 sobre o aberto $f(\mathcal{U}) \subset \mathsf{E}$. Além disso, se $\mathcal{U} = \mathsf{E}$, então $f(\mathcal{U}) = \mathsf{E}$.

4-) Seja E uma álgebra de Banach e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $1 \in \mathsf{E}$ tal que, para todo $Y \in \mathcal{U}$, existe $X \in \mathsf{E}$ tal que $X^k = Y$. Além disso, pode-se escolher $X = X(Y)$ de forma a se definir uma aplicação de classe C^∞ nesta vizinhança.

5-) Um *sistema de coordenadas de classe* C^k *num aberto* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ de classe C^k, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ aberto (Obs.: também é usual chamar o inverso de um tal difeomorfismo de sistema de coordenadas em $\mathcal{U}$, i.e. um difeo $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ de classe C^k). Mostre que as seguintes aplicações são sistemas de coordenadas:

1. (coordenadas polares) $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$, $\mathcal{V} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ e $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ dada por $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
2. (coordenadas esféricas) $\mathcal{V} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$ e $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ dada por $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$.

6-) (Lema de Morse) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^k, com $k \geqslant 3$, e a um ponto crítico não-degenerado de f. Então existe uma vizinhança aberta $W \subset \mathcal{U}$ de a e um sistema de coordenadas $\xi : V \to W$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-2}$ com $0 \in V$, $\xi(0) = a$ e tal que, para todo $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$:

$$f\xi(y) - f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j,$$

onde:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\,\mathrm{D}_{ij} f(a).$$

Sugestão: Sem perda de generalidade, suponha $a = 0$ e $f(a) = 0$.

1. Aplique a fórmula de Taylor com resto integral para mostrar que existe $\mathcal{V}$ vizinhança aberta de 0 em $\mathcal{U}$ e $A : \mathcal{V} \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-2}$ tal que: (i) $(\forall x \in \mathcal{V}) f(x) = \langle A(x)\cdot x, x\rangle$, (ii) $(\forall x \in \mathcal{V}) A(x)$ auto-adjunta com respeito ao produto interno canônico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ e (iii) $\frac{1}{2}\,\mathrm{D}^2 f(0) = \langle A(0)\cdot, \cdot\rangle$.

2. Mostre que, reduzindo $\mathcal{V}$, se necessário, existe $B : \mathcal{V} \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-2}$ tal que $(\forall x \in \mathcal{V}) A(x) = A(0)B(x)^2$, com $B(0) = \mathrm{id}$. Podemos reduzir $\mathcal{V}$ mais ainda, de modo que B satisfaça $(\forall x \in \mathcal{V}) A(0)B(x) = B(x)^* A(0)$, donde $f(x) = \langle A(0)B(x)\cdot x, B(x)\cdot x\rangle$.

3. Mostre que $x \mapsto B(x)\cdot x$ é um difeomorfismo numa vizinhança do zero, portanto define um sistema de coordenadas numa tal vizinhança.

7-) (Corolário do Lema de Morse) Com as mesmas hipóteses da questão anterior, existe um sistema de coordenadas $\zeta : V_0 \to W$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}-2}$ numa vizinhança aberta $W \subset \mathcal{U}$ de a, tal que $0 \in V_0$, $\zeta(0) = a$ e, para algum $i \in \{0, \ldots, n\}$, tem-se, para todo $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V_0$: $f\zeta(y) - f(a) = -\sum_{k=1}^{i} y_k^2 + \sum_{k=i+1}^{n} y_k^2$.

8-) (Exame de Qualificação - Jan/2010) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $(\forall (x,y) \in \mathcal{U})\ (x^2 + y^4) f(x,y) + f(x,y)^3 = 1$. Mostre que f é de classe C^∞.

9-) (Exame de Qualificação - Jan/2010) Sejam $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que ∇u não se anula e $\{\nabla u, \nabla v\}$ é linearmente dependente em $\mathbb{R}^2$. Mostre que, $\forall p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 definida num aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que $v(x,y) = f\big(u(x,y)\big)$ numa vizinhança de p_0.

10-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$, $p > n$. Mostre que f não é injetiva.

11-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $(\exists k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1, \forall t \in \mathbb{R})\ |f'(t)| \leqslant k$. Defina $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\phi(x,y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big)$. Mostre que ϕ é um difeomorfismo C^1 de $\mathbb{R}^2$ sobre si mesmo.

12-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto convexo e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ derivável. Suponha que, $\forall x \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\langle f'(x)\cdot v, v\rangle > 0$. Mostre que: (i) f é injetiva, (ii) se $f \in \mathsf{C}^1$, então f é um difeomorfismo de $\mathcal{U}$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$. Dê um exemplo em que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ e f não é sobrejetiva.

13-) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1. Suponha que $\exists \alpha > 0$ tal que $(\forall x, v \in \mathbb{R}^m)\ \|f'(x)\cdot v\| \geqslant \alpha\|v\|$. Mostre que f é um difeomorfismo C^1 de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo e que $(\forall x, v \in \mathbb{R}^m)\ \|f(x) - f(y)\| \geqslant \alpha\|x - y\|$.

14-) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $(\forall x \in \mathbb{R}^n) f'(x)$ é uma isometria linear (i.e. $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|f'(x)\cdot v\| = \|v\|$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclideana). Então f é uma isometria, i.e. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Conclua que existem $T \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ ortogonal (i.e. tal que $T^* = T^{-1}$, onde T^* denota a adjunta com respeito ao produto interno) e $a \in \mathbb{R}^n$ tais que $(\forall x \in \mathbb{R}^n) f(x) = T\cdot x + a$.

15-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^2 sobre sua imagem. Mostre que, para todo $a \in \mathcal{U}$, existe $r > 0$ tal que a imagem por f de toda bola centrada em a e de raio menor ou igual a r é um conjunto convexo.

16-) 1. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ uma aplicação diferenciável. Se $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, então $f(I)$ é o gráfico de uma aplicação derivável $\xi : J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ intervalo; ou seja, $f(I) = \{\big(t, \xi(t)\big) \mid t \in J\}$. Mostre que ξ é de classe C^{k} se f o for. Se $I = \mathbb{R}$ e existe $c > 0$ tal que $|x'(t)| \geqslant c$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $J = \mathbb{R}$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(s,t) = \big(\mathrm{e}^s \cos t, \mathrm{e}^s \sin t, t\big)$. Então f é injetiva, de classe C^∞ e o determinante jacobiano $\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}$ é diferente de zero em todos os pontos $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, mas $f(\mathbb{R}^2)$ não é o gráfico de uma função $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

17-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n+p}$ de classe C^k, $k \geqslant 1$. Se $a \in \mathcal{U}$ é tal que $\phi'(a) \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+p})$ é injetiva, então existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^p$ (onde $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$ designam, aqui, subespaços de $\mathbb{R}^{n+p}$ de dimensões n e p, respectivamente; podemos, até mesmo, tomá-los de forma que $\mathbb{R}^n$ seja gerado por n vetores $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ da base canônica de $\mathbb{R}^{n+p}$ e $\mathbb{R}^p$ seja gerado pelos vetores restantes da mesma base), um aberto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, uma aplicação $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k e uma vizinhança aberta $W \subset \mathcal{U}$ de a tais que $\phi(W)$ coincide com o gráfico de f.

18-) Dê exemplos, em $\mathbb{R}^2$, de uma aplicação de classe C^∞ aberta que não é uma submersão e de uma aplicação C^∞ injetiva que não é uma imersão.

19-) Para cada $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \equiv \mathbb{R}^{2m+2}$, seja p_a o polinômio complexo $a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$. Se z_0 é uma raiz simples do polinômio p_a, mostre que existem bolas abertas B em $\mathbb{C}^{m+1}$, centrada em a, e D em $\mathbb{C}$, centrada em z_0, tais que, para todo $b \in B$, o polinômio p_b tem uma única raiz $z = z(b)$ em D, a qual é simples, e a aplicação $B \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ dada por $b \mapsto z(b)$ é de classe C^∞. Em poucas palavras: toda raiz simples de um polinômio é uma função C^∞ dos coeficientes desse polinômio.