MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010

Prof. Gláucio Terra

4ª Lista de Exercícios - Derivadas

- 1-) Sejam E, F, G espaços normados, $\mathcal{U} \subset E$ e $\mathcal{V} \subset F$ abertos, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ e $g : \mathcal{V} \rightarrow G$ de classe C^k . Mostre que $g \circ f$ é de classe C^k . SUGESTÃO: Regra da cadeia e indução em k .
- 2-) Seja E uma álgebra de Banach com unidade (vide questões 10 e 11 da lista 2). Mostre que a aplicação $U(E) \rightarrow E$ dada por $u \mapsto u^{-1}$ é de classe C^∞ . SUGESTÃO: Use a fórmula que você encontrou na questão 11 da lista 2 para a derivada desta aplicação e faça um argumento por indução, usando a regra da cadeia.
- 3-) Discuta a natureza dos pontos críticos das funções a seguir:
- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$.
 - (ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$.
- 4-) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.
- (i) Mostre que a origem é um ponto crítico que não é de extremo.
 - (ii) Verifique que, ao longo de toda reta passando pela origem, a função tem um mínimo local em $(0, 0)$.
- 5-) Mostre que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x \geq 0, y \geq 0$, tem-se $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$.
- 6-) (a) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e $a \in I$ tais que $\phi'(a) > 0$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $x \in I$ e $a - \delta < x < a$ implicam $\phi(x) < \phi(a)$.
- (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0, \forall u \in S^{n-1}(1)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $f(tu) < f(u)$ para $1 - \epsilon < t < 1$.
- (c) Nas condições de (b), prove que existe $a \in \mathbb{R}^n$ com $\|a\| < 1$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
- 7-) (TEOREMA DA INVERSÃO NAS INTEGRAIS REPETIDAS) Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $\int_a^b ds \int_c^d f(s, t) dt = \int_c^d dt \int_a^b f(s, t) ds$. SUGESTÃO: Defina $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(x) \doteq \int_c^d dt \int_a^x f(s, t) ds$; aplique a regra de Leibnitz para derivação sob o sinal da integral (vide questão 5 da lista 3) para concluir que φ é de classe C^1 e obtenha a tese como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(x) dx$.
- 8-) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma família $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de abertos de X diz-se uma *base* para a topologia de X se, para todo $p \in X$ e toda vizinhança aberta $V \subset X$ de p , existir $\alpha \in A$ tal que $p \in \mathcal{U}_\alpha \subset V$. Diz-se que uma tal base é enumerável se o conjunto de índices A o for. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
1. (X, d) admite uma base enumerável de abertos;

2. X toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável (OBSERVAÇÃO: diz-se que um espaço topológico que satisfaça esta condição é um *espaço de Lindelöf*);
3. X possui um subconjunto enumerável denso.
- 9-) Mostre que, se (X, d) for um espaço métrico que admite uma base enumerável de abertos, todo subespaço métrico de X também admite uma tal base.
- 10-) Mostre que, se (X, d) for um espaço métrico, então todo subespaço métrico *discreto* Y de X (i.e. cujos pontos são todos isolados, ou, equivalentemente, tal que $Y \cap Y' = \emptyset$, onde Y' denota o conjunto dos pontos de acumulação de Y em X):
1. é enumerável se X admitir uma base enumerável de abertos;
 2. é finito se Y for compacto.
- 11-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável em $a \in \mathcal{U}$. Suponha que $f'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ seja não-singular (i.e. inversível). Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset \mathcal{U}$ e que, se $0 < \|x - a\| < \delta$, então $f(x) \neq f(a)$. SUGESTÃO: Aplique a fórmula de Taylor de ordem 1, com resto infinitesimal.
- 12-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até segunda ordem. Diz-se que um ponto crítico p de f (i.e. um ponto no qual a derivada de f se anula) é um *ponto crítico não-degenerado* se $D^2f(p) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ for não-singular. Mostre que: (1) o conjunto dos pontos críticos não-degenerados de f é enumerável; (2) se $K \subset \mathcal{U}$ é compacto, o conjunto dos pontos críticos não-degenerados de f que pertencem a K é finito. SUGESTÃO: Aplique a questão anterior para $Df : \mathcal{U} \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^n$ e o resultado da questão 10-).
- 13-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica, i.e. f é de classe C^2 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ em $\mathcal{U}$. Mostre que, se todos os pontos críticos de f forem não-degenerados, então f não possui máximos nem mínimos locais em $\mathcal{U}$.
- 14-) Sejam E, F espaços normados, $\mathcal{U} \subset E$ aberto conexo e $f, g : \mathcal{U} \rightarrow F$ deriváveis até segunda ordem em $\mathcal{U}$. Suponha que, para algum $a \in \mathcal{U}$, tem-se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$, e que $(\forall x \in \mathcal{U}) f''(x) = g''(x)$. Mostre que $f = g$.
- 15-) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , tal que $(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Mostre que existe $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = g(x, y) \cdot x \cdot y$.
- 16-) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto *estrelado* com respeito à origem (i.e. tal que, para todo $p \in \mathcal{U}$, $[0, p] \subset \mathcal{U}$), $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k e $0 \leq i \leq k$. Suponha que as derivadas parciais de ordem menor que i de f se anulam na origem. Mostre que existem, para cada n -upla de inteiros não-negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \doteq \sum_{j=1}^n \alpha_j = i$, funções de classe C^{k-i} $g_\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in \mathcal{U}$, $f(x) = \sum_{|\alpha|=i} g_\alpha(x) x^\alpha$, onde $x^\alpha \doteq x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ se $x = (x_1, \dots, x_n)$. SUGESTÃO: Fórmula de Taylor com Resto Integral.
- 17-) Sejam E, F espaços normados e $f : E \rightarrow F$ positivamente homogênea de grau $k \in \mathbb{N}$ (i.e. tal que para todo $x \in E$ e para todo $t > 0$, $f(tx) = t^k f(x)$). Mostre que, se f for k vezes derivável na origem, existe uma forma k -linear contínua $\varphi \in L_k(E, F)$ tal que $(\forall x \in E) f(x) = \varphi \cdot x^k$. Em particular, se $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{R}$, segue-se que f é um polinômio homogêneo de grau k em n variáveis.

18-) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até ordem $k + 1$ e tal que $f^{(k+1)} \equiv 0$. Mostre que f é uma função polinomial em n variáveis, de grau menor ou igual a k .

19-) Seja E uma álgebra de Banach com unidade e $\exp : E \rightarrow E$ dada por $x \mapsto e^x \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (vide questão 11 da lista 2).

1. Mostre que $\exp$ é de classe C^∞ . SUGESTÃO: Considere a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de classe C^∞ dada por $(\forall n \in \mathbb{N}) s_n : E \rightarrow E$, $s_n(x) \doteq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Encontre, para cada $m \in \mathbb{N}$, a sequência das derivadas de ordem m , $(s_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$, $s_n^{(m)} : E \rightarrow L_m(E, E)$. Dado $R > 0$, mostre que a sequência $(s_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente na bola $B_R(0) \subset E$ (para tal, mostre que a sequência satisfaz o critério de Cauchy uniformemente nesta bola). Aplique, então, a questão 2 da lista 3.

2. Dado $X \in E$, mostre que $F \doteq \{h \in E \mid Xh = hX\}$ é um subespaço fechado de E . Além disso, para todo $h \in F$, tem-se $\exp'(X) \cdot h = e^X h = h e^X$.