MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010
Prof. Gláucio Terra

3^a Lista de Exercícios - Derivadas (aplicações da desigualdade do valor médio)

1-) (APLICAÇÕES UNIFORMEMENTE DERIVÁVEIS) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ derivável. Diz-se que f é *uniformemente derivável* em $X \subset \mathcal{U}$ se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in X$, $\forall y \in \mathcal{U}$ tais que $\|y - x\| < \delta$, tem-se $\|f(y) - f(x) - \mathrm{D}f(x) \cdot (y - x)\| \leqslant \epsilon \|y - x\|$. Mostre que, se f for de classe C^1, então f é uniformemente derivável em todo compacto contido em $\mathcal{U}$. SUGESTÃO: Dados $x \in X$ e $y \in \mathcal{U}$, use a desigualdade do valor médio para estimar $\|f(y) - f(x) - \mathrm{D}f(x) \cdot (y - x)\|$ e o fato de que toda função contínua num compacto é uniformemente contínua (conforme lista 1).

2-) (SEQUÊNCIA DE APLICAÇÕES DERIVÁVEIS, PARTE I) Sejam E e F espaços de Banach, $\mathcal{U} \subset \mathsf{E}$ um aberto convexo e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de aplicações diferenciáveis $\mathcal{U} \to \mathsf{F}$ e $g : \mathcal{U} \to \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$. Suponha que:

(i) existe $a \in \mathcal{U}$ tal que a sequência $\{f_n(a)\}_n$ converge em F;

(ii) $(\mathrm{D}f_n)_n$ converge uniformemente em $\mathcal{U}$ para g.

Então existe $f : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$ tal que, para cada $x \in \mathcal{U}$, a sequência $\{f_n(x)\}_n$ converge para $f(x)$. Em cada parte limitada $X \subset \mathcal{U}$, a sequência $(f_n)_n$ converge uniformemente para f em X. Finalmente, f é derivável e $\mathrm{D}f = g$.
SUGESTÃO:

1. Estime $\|(f_p(x) - f_p(a)) - (f_q(x) - f_q(a))\|$ através da desigualdade do valor médio e conclua que a sequência $(f_n)_n$ é uniformemente Cauchy nas partes limitadas de $\mathcal{U}$.

2. Conclua, a partir do item anterior, que $(f_n)_n$ converge pontualmente em $\mathcal{U}$ para uma função $f : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$, e que a convergência é uniforme nas partes limitadas de $\mathcal{U}$. Mostre que isto implica f contínua.

3. Para mostrar que f é derivável e $f' = g$, use $\|f(x) - f(x_0) - g(x_0) \cdot (x - x_0)\| \leqslant \|(f(x) - f(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))\| + \|f_n(x) - f_n(x_0) - f_n'(x_0) \cdot (x - x_0)\| + \|f_n'(x_0) \cdot (x - x_0) - g(x_0) \cdot (x - x_0)\|$ e estime convenientemente cada uma das três parcelas do segundo membro; para estimar a primeira, aplique a desigualdade do valor médio para $\|(f_m(x) - f_m(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))\|$ e faça $m \to \infty$.

3-) (SEQUÊNCIA DE APLICAÇÕES DERIVÁVEIS, PARTE II) Demonstre o teorema da questão anterior supondo (1) $\mathcal{U}$ conexo e (2) que a sequência $(\mathrm{D}f_n)_n$ convirja uniformemente para g numa vizinhança aberta de cada ponto de $\mathcal{U}$, mantendo-se as demais hipóteses. SUGESTÃO: Use a questão anterior para concluir que:

1. O conjunto dos pontos $x \in \mathcal{U}$ em que $(f_n(x))_n$ converge é aberto e fechado em $\mathcal{U}$.

2. Use a conexidade de $\mathcal{U}$, o item anterior e a questão anterior para concluir que f_n converge pontualmente para uma função $f : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$, que a convergência é localmente uniforme (i.e. uniforme numa vizinhança de cada ponto), que f é derivável e $f' = g$.

4-) (APLICAÇÕES ESTRITAMENTE DERIVÁVEIS) Sejam E, F espaços normados, $\mathcal{U} \subset \mathsf{E}$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$. Diz-se que f é *estritamente derivável* em $a \in \mathcal{U}$ se existir $A \in \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, a aplicação $x \mapsto f(x) - f(a) - A \cdot (x - a)$ for ϵ-Lipschitz numa vizinhança de a. Ou, equivalentemente, se:

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x) - f(y) - A \cdot (x - y)}{\|x - y\|} = 0.$$

Mostre que:

1. se f for estritamente derivável em a, então f é derivável em a.
2. se f for derivável em $\mathcal{U}$, então f é estritamente derivável em a se, e somente se, $\mathrm{D}f : \mathcal{U} \to \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ for contínua em a. SUGESTÃO: Aplique a desigualdade do valor médio.

5-) (REGRA DE LEIBNITZ PARA DERIVAÇÃO SOB O SINAL DA INTEGRAL) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f : \mathcal{U} \times [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Suponha que, para cada $x \in \mathcal{U}$, $f_x \doteq f(x, \cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ seja Riemann-integrável e defina $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ por $\varphi(x) \doteq \int_a^b f_x$.

1. Mostre que, se f for contínua, então φ é contínua. SUGESTÃO: Estime $\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|$ para x próximo de x_0 usando a continuidade de f e: (1) o fato de que toda aplicação contínua num compacto é uniformemente contínua **ou** (2) a questão 11 da lista 1 (vizinhanças tubulares). O argumento usando (2) tem a vantagem de se generalizar para a situação em que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ são substituídos por espaços de Banach E e F.
2. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Suponha que, para todo $(x, t) \in \mathcal{U} \times [a, b]$ exista a i-ésima derivada parcial $\mathrm{D}_i f_t(x)$, onde $(\forall t \in [a, b]) f_t \doteq f(\cdot, t) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, e que $\mathrm{D}_i f : \mathcal{U} \times [a, b] \to \mathbb{R}^m$ dada por $(x, t) \mapsto \mathrm{D}_i f_t(x)$ seja contínua. Mostre que $(\forall x \in \mathcal{U}) \exists \mathrm{D}_i \varphi(x)$, a qual é dada por $\mathrm{D}_i \varphi(x) = \int_a^b \mathrm{D}_i f(x, t)\, \mathrm{d}t$, e que $\mathrm{D}_i \varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ é contínua. Em suma: pode-se derivar sob o sinal da integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua; em caso afirmativo, a derivada também será contínua. SUGESTÃO: Aplique o teorema do valor médio e a sugestão do item anterior.

6-) (DERIVADAS PARCIAIS EM ESPAÇOS NORMADOS) Sejam $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_n, \mathsf{F}$ espaços normados, $\mathcal{U}$ aberto em $\mathsf{E} \doteq \mathsf{E}_1 \times \cdots \times \mathsf{E}_n$ e $f : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$. Dados $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$ e $1 \leqslant i \leqslant n$, sejam $\lambda_i : \mathsf{E}_i \to \mathsf{E}$ dada por $x \mapsto (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ e $f \circ \lambda_i : \lambda_i^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathsf{F}$, chamada *i-ésima aplicação parcial* de f no ponto a. Mostre que, se f for derivável em a, então (para $1 \leqslant i \leqslant n$) $f \circ \lambda_i$ é derivável em a_i. Chamamos a derivada de $f \circ \lambda_i$ em a_i de i-ésima derivada parcial de f em a e a denotamos por $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$; tal derivada parcial é, portanto, um elemento de $\mathsf{L}(E_i, \mathsf{F})$. Além disso, se f for derivável em a, tem-se, para todo $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathsf{E}$:

$$\mathrm{D}f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(a) \cdot h_i.$$

7-) Com a notação da questão anterior, suponha que f seja derivável em $\mathcal{U}$. Mostre que $\mathrm{D}f : \mathcal{U} \to \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ é contínua se, e somente se, (para $1 \leqslant i \leqslant n$) $\mathrm{D}_i f : \mathcal{U} \to \mathsf{L}(\mathsf{E}_i, \mathsf{F})$ for contínua em a.

8-) (FUNÇÕES DE CLASSE C^1 EM ESPAÇOS NORMADOS) Sejam $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_n, \mathsf{F}$ espaços normados, $\mathcal{U}$ aberto em $\mathsf{E} \doteq \mathsf{E}_1 \times \cdots \times \mathsf{E}_n$ e $f : \mathcal{U} \to \mathsf{F}$. Suponha que, para todo $x \in \mathcal{U}$ e para $1 \leqslant i \leqslant n$, exista $\mathrm{D}_i f(x) \in \mathsf{L}(\mathsf{E}_i, \mathsf{F})$ e que $\mathrm{D}_i f : \mathcal{U} \to \mathsf{L}(\mathsf{E}_i, \mathsf{F})$ seja contínua. Mostre que f é de classe C^1 (i.e. f é derivável e $\mathrm{D}f : \mathcal{U} \to \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ é contínua). SUGESTÃO: Aplique a desigualdade do valor médio para generalizar a demonstração feita em aula para o caso $\mathsf{E}_i = \mathbb{R}$, $\mathsf{E} = \mathbb{R}^n$ e $\mathsf{F} = \mathbb{R}^m$.