MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010
Prof. Gláucio Terra

2^a Lista de Exercícios - Derivadas

1-)

1. Toda aplicação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.
2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear, então $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n)$ f é derivável em x_0 e $\mathrm{D}f(x_0) = f$.

2-) Encontre as derivadas das seguintes aplicações, nos pontos indicados:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(u,v) = u \operatorname{sen}(uv)$, em $(\frac{\pi}{2}, 2)$.
(ii) $g \circ f$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(u,v) = (u^2 + v^2, uv)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(x,y) = (\operatorname{sen} x \cos y, \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \cos x)$, no ponto $(0,1)$.

3-) Encontre a matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (xyz^2 - 4y^2, 3xy^2 - y^2 z)$ e encontre os pontos (caso existam):

(i) em que a matriz tem posto 0;
(ii) em que a matriz tem posto 1.

4-) Sejam $\mathsf{L}(\mathbb{R}^2) = \{$aplicações $\mathbb{R}$-lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}$ e $\mathsf{L}(\mathbb{C}) = \{$aplicações $\mathbb{C}$-lineares $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$. Considere as seguintes identificações: (1) $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$; (2) $\mathsf{L}(\mathbb{R}^2) \equiv \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \doteq \{$matrizes 2x2 com entradas reais$\}$, associando cada transformação linear à sua matriz na base canônica; (3) $\mathsf{L}(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C} \equiv \{A \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^2) \mid A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$, sendo a última identificação dada pela aplicação $\iota : \mathbb{C} \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^2)$ definida por $z = a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações, dada $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida num aberto de $\mathbb{C}$:

1. f é *holomorfa* em $z_0 \in \mathcal{U}$, i.e. existe $f'(z_0) \doteq \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$.
2. f é derivável em $z_0 \in \mathcal{U}$ e $\mathrm{D}f(z_0) \in \mathsf{L}(\mathbb{C}) \subset \mathsf{L}(\mathbb{R}^2)$.

Caso uma das afirmações equivalentes acima seja verificada (e, portanto, ambas), tem-se, através da identificação $\iota : \mathbb{C} \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^2)$, acima, $f'(z_0) = \mathrm{D}f(z_0)$.

5-) Mostre que, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é derivável e $(\forall x \in \mathbb{R}^n) f(x/2) = f(x)/2$, então f é linear.

6-) (CONTINUIDADE DE APLICAÇÕES MULTILINEARES) Sejam $k \in \mathbb{N}$, $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_k$ e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $f : \mathsf{E}_1 \times \cdots \times \mathsf{E}_k \to \mathsf{F}$ diz-se *k-linear* se $\forall v_1 \in \mathsf{E}_1, \ldots, \forall v_k \in \mathsf{E}_k$, as k aplicações $(1 \leqslant i \leqslant k) f_i(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k) : \mathsf{E}_i \to \mathsf{F}$ dadas por $v \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_i, \ldots, v_k)$ forem lineares. No caso $\mathsf{F} = \mathbb{R}$, uma aplicação k-linear também é chamada de *forma k-linear*.

Considere, agora, $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_k$ e F espaços normados, e seja $\mathsf{L}(\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_k; \mathsf{F})$ o espaço das transformações k-lineares contínuas $\mathsf{E}_1 \times \cdots \times \mathsf{E}_k \to \mathsf{F}$. Mostre que, dada $f : \mathsf{E}_1 \times \cdots \times \mathsf{E}_k \to \mathsf{F}$ aplicação k-linear, são equivalentes as seguintes afirmações:

1. f é contínua, i.e. $f \in \mathsf{L}(\mathsf{E}_1, \dots, \mathsf{E}_k; \mathsf{F})$;

2. f é contínua em $0 \in \mathsf{E}_1 \times \dots \times \mathsf{E}_k$;

3. f é limitada no produto das bolas unitárias $\|v_1\| \leqslant 1, \dots, \|v_k\| \leqslant 1$.

Caso uma (e, portanto, todas) das afirmações acima seja verificada, podemos definir $\|\cdot\| : \mathsf{L}(\mathsf{E}_1, \dots, \mathsf{E}_k; \mathsf{F}) \to \mathbb{R}$ por $\|f\| \doteq \sup\{\|f(v_1, \dots, v_k)\| \mid \|v_1\| \leqslant 1, \dots, \|v_k\| \leqslant 1\}$. Mostre que:

1. $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathsf{L}(\mathsf{E}_1, \dots, \mathsf{E}_k; \mathsf{F})$, munido da qual se torna um espaço de Banach se F o for.

2. $\forall (v_1, \dots, v_k) \in \mathsf{E}_1 \times \dots \times \mathsf{E}_k$, $\|f(v_1, \dots, v_k)\| \leqslant \|f\| \|v_1\| \cdots \|v_k\|$, e que $\|f\|$ é o ínfimo das constantes $M > 0$ para as quais a última desigualdade se verifica.

3. Se $\mathsf{E}_1, \dots, \mathsf{E}_k$ são todos espaços de dimensão finita, toda aplicação k-linear $\mathsf{E}_1 \times \dots \times \mathsf{E}_k \to \mathsf{F}$ é contínua.

7-) Com a mesma notação da questão anterior, mostre que, se $f \in \mathsf{L}(\mathsf{E}_1, \dots, \mathsf{E}_k; \mathsf{F})$, então f é derivável. Calcule a sua derivada.

8-) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^a$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclideana. Estude a diferenciabilidade de f e calcule sua derivada nos pontos onde for derivável. SUGESTÃO: escreva $\|x\|^a = \langle x, x \rangle^{a/2}$; use a bilinearidade do produto interno, o exercício anterior e a regra da cadeia

9-) Uma série $\sum a_n$ num espaço normado E diz-se *normalmente convergente* se for convergente a série de números reais $\sum \|a_n\|$. Mostre que, se E for um espaço de Banach, toda série normalmente convergente $\sum a_n$ em E é convergente, i.e. existe $p \in \mathsf{E}$ tal que a sequência das somas parciais de $\sum a_n$ converge para p.

10-) Uma *álgebra associativa sobre* $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real E munido de uma operação bilinear $\cdot : \mathsf{E} \times \mathsf{E} \to \mathsf{E}$, chamada *multiplicação* da álgebra, a qual é associativa, i.e. $(\forall x, y, z \in \mathsf{E})(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Se a referida multiplicação admitir um elemento neutro $1 \in \mathsf{E}$, diz-se que E é uma álgebra associativa *com unidade.*

Uma *álgebra normada* sobre $\mathbb{R}$ é uma álgebra associativa E sobre $\mathbb{R}$, cujo espaço vetorial subjacente é munido de uma norma $\|\cdot\| : \mathsf{E} \to \mathbb{R}$, a qual satisfaz $(\forall x, y \in \mathsf{E}) \|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \|y\|$, i.e. a multiplicação é uma operação bilinear contínua, cuja norma (em $\mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{E}; \mathsf{E})$, conforme definição na questão **6-)**) é menor ou igual a 1. Diz-se que E é uma *álgebra normada com unidade* se for uma álgebra normada e admitir unidade $1 \in \mathsf{E}$ com $\|1\| = 1$. Diz-se que E é uma *álgebra de Banach* se for uma álgebra normada completa, i.e. uma álgebra normada cujo espaço vetorial subjacente é um espaço de Banach.

Mostre que, se E for um espaço de Banach, $\mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{E})$ é uma álgebra de Banach com unidade (tomando-se a multiplicação como sendo a operação de composição).

11-) Seja E uma álgebra de Banach com unidade.

1. Mostre que, para todo $f \in \mathsf{E}$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}$ é normalmente convergente (vide questão **9-)**); a soma desta série chama-se *exponencial de* f e denota-se por $\exp f$.

2. Mostre que, para todo $v \in \mathsf{E}$ com $\|v\| < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ é normalmente convergente. Além disso, sendo $u \in \mathsf{E}$ a soma da referida série, tem-se $(1 - v) \cdot u = u \cdot (1 - v) = 1$, donde se que conclui que, $\forall v \in \mathsf{E}$ com $\|v\| < 1$, $1 - v$ tem um inverso multiplicativo.

3. Seja $\mathsf{U}(\mathsf{E}) \doteq \{x \in \mathsf{E} \mid \exists x^{-1} \doteq \text{ inverso multiplicativo de } x\}$. Mostre que $\mathsf{U}(\mathsf{E})$ é aberto em E. SUGESTÃO: dados $u_0 \in \mathsf{U}(\mathsf{E})$ e $u \in \mathsf{E}$, note que $u \in \mathsf{U}(\mathsf{E})$ se, e somente se, $u_0^{-1} \cdot u \in \mathsf{U}(\mathsf{E})$; considere $v \in \mathsf{E}$ dado por $1 - v = u_0^{-1} \cdot u$, use o item anterior e encontre uma estimativa conveniente para $\|u - u_0\|$ que garanta $u_0^{-1} \cdot u \in \mathsf{U}(\mathsf{E})$.

4. Mostre que a aplicação $\mathsf{U}(\mathsf{E}) \to \mathsf{E}$ dada por $u \mapsto u^{-1}$ é derivável e encontre a sua derivada. SUGESTÃO: Dados $u_0 \in \mathsf{U}(\mathsf{E})$ e $h \in \mathsf{E}$ tais que $(u_0 + h) \in \mathsf{U}(\mathsf{E})$, escreva $(u_0 + h)^{-1} - u_0^{-1} = [u_0 \cdot (1 + u_0^{-1} \cdot h)]^{-1} - u_0^{-1} = (1 + u_0^{-1} \cdot h)^{-1} \cdot u_0^{-1} - u_0^{-1} = [(1 + u_0^{-1} \cdot h)^{-1} - 1] \cdot u_0^{-1}$ e agora use o item 2 para escrever $(u_0 + h)^{-1} - u_0^{-1}$ como série de potências de h e u_0^{-1}.