

MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010

Prof. Gláucio Terra

1ª Lista de Exercícios - Espaços Métricos

- 1-) Dê exemplo de uma coleção infinita de abertos num espaço métrico em que:
- (i) a intersecção é um aberto;
 - (ii) a intersecção não é aberta.
- 2-) Quais dos conjuntos descritos a seguir são fechados?
- (i) em $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$;
 - (ii) em $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} = \{\text{rationais}\}$.
- 3-) Quais dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ abaixo são abertos? Quais são fechados?
- (i) $\mathbb{R} \times \{0\}$;
 - (ii) $\mathbb{R} \times (-1, 1)$;
 - (iii) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$;
 - (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin xy + y^3 - x^2 = 0\}$.
- 4-) Sejam (X, d) um espaço métrico e $A, B \subset X$. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas; justifique ou dê um contra-exemplo.
- (i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
 - (ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- 5-) Mostre que todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.
- 6-) Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Defina, $(\forall p \in X) d(x, A) \doteq \inf \{d(p, q) \mid q \in A\}$.
1. Mostre que $d(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida é contínua. SUGESTÃO: Mostre que $(\forall p, q \in X) |d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q)$, i.e. $d(\cdot, A)$ é uma *contração fraca* e, em particular, lipschitziana.
 2. Mostre que $\overline{A} = \{p \in X \mid d(p, A) = 0\}$.
- 7-) Sejam (X, d) um espaço métrico e $A, B \subset X$. Defina $d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.
1. Dê um exemplo em que A e B são fechados disjuntos e $d(A, B) = 0$.
 2. Mostre que, se A for fechado e B compacto e $A \cap B = \emptyset$, então $d(A, B) > 0$.
- 8-) Sejam (X, d) um espaço métrico e $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ e $\min\{f_1, \dots, f_n\}$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ e $x \mapsto \min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, são contínuas.

9-) Sejam (X, d) um espaço métrico e $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de X . Diz-se que $\rho > 0$ é um *número de Lebesgue* para a referida cobertura se, para todo $B \subset X$ tal que $\text{diam } B < \rho$, existe $\alpha \in A$ tal que $B \subset \mathcal{U}_\alpha$.

Mostre que, se (X, d) for um espaço métrico compacto, toda cobertura aberta de X admite um número de Lebesgue. SUGESTÃO: Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de X . Extraia uma subcobertura finita $(\mathcal{U}_i)_{1 \leq i \leq n}$ desta cobertura e, para $1 \leq i \leq n$, considere $f_i = d(\cdot, \tilde{\mathcal{U}}_i) : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \doteq \max\{f_1, \dots, f_n\}$. Conclua que f tem valor mínimo $\rho > 0$, que será um número de Lebesgue para a cobertura em questão.

10-) Sejam $(X, m_X), (Y, d_Y)$ espaços métricos. Diz-se que $f : X \rightarrow Y$ é *uniformemente contínua* se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in X$ e $d_X(x, y) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. Mostre que, se X for um espaço métrico compacto, então toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é uniformemente contínua. SUGESTÃO: Seja $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de Y por bolas de raio $\epsilon > 0$. Tome $(\forall \alpha \in A) \mathcal{U}_\alpha \doteq f^{-1}(B_\alpha)$ e $\delta > 0$ um número de Lebesgue para a cobertura $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$.

11-) (VIZINHANÇAS TUBULARES) Sejam X, K espaços métricos, com K compacto. Sejam $x_0 \in X$ e $\mathcal{U} \subset X \times K$ um aberto tais que $\{x_0\} \times K \subset \mathcal{U}$. Mostre que existe $\mathcal{V} \subset X$ vizinhança aberta de x_0 tal que $\mathcal{V} \times K \subset \mathcal{U}$.

12-) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma *cisão* de X é um par (A, B) onde A e B são abertos disjuntos de X tais que $X = A \cup B$. Diz-se que uma cisão (A, B) é *trivial* se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Diz-se que (X, d) é *conexo* toda cisão de X for trivial. Diz-se que um subconjunto de X é *conexo* se o for como subespaço métrico de X .

Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

1. (X, d) é conexo;
2. X e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados;
3. se $A \subset X$ tem fronteira vazia, então $A = \emptyset$ ou $A = X$.

13-) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços métricos. Mostre que a imagem por f de um conjunto conexo é conexa.

14-) Seja (X, d) um espaço métrico. Diz-se que X é *conexo por caminhos* se dois pontos quaisquer de X puderem ser ligados por um caminho contínuo em X , i.e. se $\forall p, q \in X, \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Diz-se que um subconjunto de X é *conexo por caminhos* se o for como subespaço métrico de X . Diz-se que X é *localmente conexo por caminhos* se todo ponto de X tiver uma vizinhança conexa por caminhos.

Mostre que:

1. se (X, d) for conexo por caminhos, então é conexo;
2. se (X, d) for conexo e localmente conexo por caminhos, então é conexo por caminhos;
3. a imagem de um conjunto conexo por caminhos por uma aplicação contínua entre espaços métricos é conexa por caminhos.

15-)

1. $\mathbb{R}^n$ é conexo;
2. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, for um intervalo.

3. Como corolário do item anterior, conclua que a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua definida num espaço métrico e a valores reais é um intervalo; em particular, obtenha daí o teorema do valor intermediário.

16-) Sejam E, F espaços normados e $A : E \rightarrow F$ uma transformação linear. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

1. $A \in L(E, F)$, i.e. A é linear contínua;
2. A é contínua no 0;
3. existe $C \geq 0$ tal que $\|A \cdot x\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$;
4. A é uniformemente contínua.

Se $A \in L(E, F)$ e $\|A\| \cdot \sup\{\|A \cdot x\| \mid x \in E, \|x\| \leq 1\}$, então:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|A \cdot x\| \mid \|x\| = 1\} = \\ &= \sup\left\{\frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} \mid x \neq 0\right\} = \\ &= \inf\{C > 0 \mid (\forall x \in E) \|A \cdot x\| \leq C\|x\|\} \end{aligned}$$

$\|\cdot\|$ assim definida é uma norma em $L(E, F)$; munido desta norma, $L(E, F)$ é um espaço de Banach se F o for.