Questão 1 :

(H) $\begin{cases} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ positivamente homogênea de grau } K \in \mathbb{N} \\ f \ K \text{ vezes derivável na origem} \end{cases}$

(T) f polinômio homogêneo de grau K em n variáveis.

Dem.: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t > 0$: $f(tx) \overset{(*)}{=} t^K f(x)$. Em particular, para $x = 0$ conclui-se que $f(0) = 0$ e $(*)$ também vale para $t = 0$. Seja $\gamma : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (dado $x \in \mathbb{R}^n$)

$$t \longmapsto f(tx) = t^K f(x)$$

Pela regra da cadeia, tem-se :

$$\gamma^{(K)}(0) = f^{(K)}(0) \cdot x^K$$

Derivando-se o segundo membro de $(*)$, segue-se :

$$\gamma^{(K)}(0) = K!\, f(x)$$

Logo, $f(x) = \dfrac{f^{(K)}(0) \cdot x^K}{K!}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. #

Questão 2 :

$\forall x \in U$, $[0, x] \subset U$; pela fórmula de Taylor c/ resto integral, tem-se :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{K-1} \frac{f^{(i)}(0) \cdot x^i}{i!}}_{=0} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{K-1}}{(K-1)!} f^{(K)}(tx) \cdot x^K \, dt \quad (*)$$

Pondo $x = (x_1, \dots, x_n)$, tem-se:

$$f^{(k)}(tx) \cdot x^k = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \\ \alpha_j \geq 0}} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(tx)\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Donde, de (*):

$$f(x) = \sum_{|\alpha| = k} \left[\int_0^1 \frac{k(1-t)^{k-1}}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(tx)\, dt \right] x^\alpha$$

Como $f \in C^\infty$, segue-se da regra de Leibnitz p/ derivação sob o sinal da integral que

$$g_\alpha(x) \doteq \int_0^1 \frac{k(1-t)^{k-1}}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(tx)\, dt$$

é de classe C^∞. #

Questão 3:

Seja $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ t.q. $[p, p+h] \subset U$. Definamos, $\forall v \in \mathbb{R}^n / p + v \in U$, $\varphi(v) \doteq f(p+v) - f(p) - A \cdot v$.

Como φ é contínua em $[p, p+h]$ e derivável em $]p, p+h[$, segue-se da desigualdade do valor médio que

$$\| \varphi(h) \| = \| \varphi(h) - \varphi(0) \| \leq \sup_{\xi \in]0,h[} \| f'(p+\xi) - A \| \cdot \|h\|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta > 0$ t.q. $B_\delta(p) \subset U$ e t.q. $\sup_{\xi \in]0,h[} \| f'(p+\xi) - A \| < \varepsilon$ se $\|h\| < \delta$ (pois $\lim_{x \to p} f'(x) = A$ por hipótese), donde, $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ t.q. $\|h\| < \delta$: $\|f(p+h) - f(p) - A \cdot h\| = \|\varphi(h)\| < \varepsilon \|h\|$.

#

Questão 4:

Seja $p \in \mathbb{R}^n$ ponto crítico de f. Então $D(Df)(p) : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é não-singular, i.e. $D(Df)(p) \cdot x \neq 0$ se $x \neq 0$. Assim, a aplicação contínua $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|D(Df)(p) \cdot x\| \in \mathbb{R}$ é positiva no compacto $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$, donde $\exists c > 0$ t.q. $(\forall x \in S^1)\ \|D(Df)(p) \cdot x\| \geq c$.

Pela fórmula de Taylor c/ resto infinitesimal aplicada a $Df : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tem-se:

$$Df(p+h) \overset{(*)}{=} \underbrace{Df(p)}_{=0} + D(Df)(p) \cdot h + R(h)$$

c/ $\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$. Para $\varepsilon = c > 0$, tome $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset U$ e tal que $\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} < c$ se

4

$0 < \|h\| < \delta$. Segue-se, então, de (*), que, se $0 < \|h\| < \delta$:

$$\|Df(p+h)\| = \|h\| \left\| D(Df)(p)\cdot\frac{h}{\|h\|} + \frac{R(h)}{\|h\|} \right\| \geq$$

$$\geq \|h\| \left[\underbrace{\left\| D(Df)(p)\cdot\frac{h}{\|h\|} \right\|}_{\geq c} - \underbrace{\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}}_{< c} \right] > 0$$

donde p é o único pto. crítico de f em $B_\delta(p)$. #

Questão 5:

(i) $\det : L(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, logo $GL(\mathbb{R}^n) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ é aberto em $L(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\forall A \in GL(\mathbb{R}^n)$, $\forall h \in L(\mathbb{R}^n) / A+h \in GL(\mathbb{R}^n)$:

$$(A+h)^{-1} - A^{-1} = [A(I + A^{-1}h)]^{-1} - A^{-1} =$$

$$= (I + A^{-1}h)^{-1}A^{-1} - A^{-1} = [(I+A^{-1}h)^{-1} - I]A^{-1} \quad (*)$$

Se $\|h\| < 1/\|A^{-1}\|$, tem-se $\|A^{-1}h\| < 1$, donde $(I + A^{-1}h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-A^{-1}h)^n$ e, de (*) segue:

$$(A+h)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}hA^{-1} + \underbrace{\left[\sum_{n=2}^{\infty}(-A^{-1}h)^n\right]A^{-1}}_{=:\, R(h)}$$

Como $\|R(h)\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|A^{-1}\|^{n-1}\|h\|^n = \|h\|^2 \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\overbrace{\|A^{-1}\|\,\|h\|}^{<1}\Big)^n\right]\|A^{-1}\|}_{\text{limitada}}$

Segue-se $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$, donde

$$\begin{aligned} I : GL(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n) \\ X &\longmapsto X^{-1} \end{aligned}$$

é derivável e $(\forall X \in GL(\mathbb{R}^n), \forall h \in L(\mathbb{R}^n))$

$$I'(X)\cdot h = -X^{-1}\cdot h \cdot X^{-1}$$

Seja

$$\begin{aligned} \mu : L(\mathbb{R}^n)\times L(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L(L(\mathbb{R}^n)) \\ (A, B) &\longmapsto (h \mapsto -AhB) \end{aligned}$$

Então $I' \overset{(*)}{=} \mu \circ (I, I) : GL(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L(L(\mathbb{R}^n))$.

Como I é contínua (pois é derivável) e μ é bilinear (logo C^∞), segue-se I' contínua, donde $I \in C^1$.

Assumindo, como hipótese de indução, $I \in C^K$, segue-se de tal que $I' \in C^K$, i.e. $I \in C^{K+1}$. Então $I \in C^\infty$. #

Questão 6

$\forall x \in U$, $[a, x] \subset U$ pela convexidade de U.

Assim, segue-se da desigualdade do valor médio que, $\forall x \in U$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$:

$$\| [f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(a) - f_n(a)] \| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left[\sup_{\xi \in]a,x[} \| f_m'(\xi) - f_n'(\xi) \| \right] \| x - a \|}_{\xrightarrow{m,n\to\infty} 0} \quad \left(\text{pois } f_n' \xrightarrow{u} g \text{ em } U\right)$$

donde $\| f_m(x) - f_n(x) \| \overset{(*)}{\leq} \overbrace{\left[\sup_{\xi \in]a,x[} \| f_m'(\xi) - f_n'(\xi) \| \right]} \|x - a\| +$

$$+ \underbrace{\| f_m(a) - f_n(a) \|}_{\xrightarrow{m,n\to\infty} 0}$$

(pois $f_n(a)$ converge)

$\therefore \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, logo convergente, pois F é espaço de Banach. Seja $f : U \to F$ dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} (\forall x \in U) \ \| f_m'(x) - f_n'(x) \| < \varepsilon & \text{se } m, n \geq n_0 \\ \text{e } \ \| f_m(a) - f_n(a) \| < \varepsilon & \text{se } m, n \geq n_0 \end{cases}.$$

Segue-se de (*) que, $\forall m, n \geq n_0$, $\forall x \in U$:

$$\| f_m(x) - f_n(x) \| \overset{(**)}{<} \varepsilon (\| x - a \| + 1)$$

e, tomando-se $\lim_{n\to\infty}$ em (**), segue-se que

$$\forall x \in U, \ \forall m \geqslant n_0 : \ \| f_m(x) - f(x) \| < \varepsilon(\|x-a\|+1),$$

donde se conclui que $f_n \xrightarrow{u} f$ nas partes limitadas de U.

Resta mostrar que f é derivável e $f' = g$.

Tem-se, $\forall x \in U$, $\forall h \in E / x+h \in U$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\| f(x+h) - f(x) - g \cdot h \| \leqslant \overbrace{\| [f(x+h) - f(x)] - [f_n(x+h) - f_n(x)] \|}^{(\Delta)} +$$
$$+ \overbrace{\| f_n(x+h) - f_n(x) - f_n'(x) \cdot h \|}^{(\Delta\Delta)} +$$
$$+ \underbrace{\| [f_n'(x) - g(x)] \cdot h \|}_{(\Delta\Delta\Delta)}$$

Dados $x \in U$ e $\varepsilon > 0$:

(i) $\forall x \in U$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\forall h \in E / x+h \in U$: $\longrightarrow$ des. do valor médio

$$\| [f_m(x+h) - f_m(x)] - [f_n(x+h) - f_n(x)] \| \leqslant$$
$$\leqslant \Big[\sup_{\xi \in]x, x+h[} \| f_m'(\xi) - f_n'(\xi) \| \Big] \|h\| < \frac{\varepsilon}{3} \|h\| \quad \text{se}$$

$m, n \geqslant n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{N} / \forall x \in U, \forall m, n \geqslant n_0$,

$\| f_m'(x) - f_n'(x) \| < \varepsilon/3$. Tomando $\lim_{m\to\infty}$, conclui-se

que $(\Delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|h\|$ e que $(\Delta\Delta\Delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|h\|$ se $n \geqslant n_0$.

(ii) Tomando $n = n_0$ em $(\Delta\Delta)$, $\exists\, \delta > 0 \,/\, B_\delta(x) \subset U$ e, se $h \in E \,/\, \|h\| < \delta$:

$$(\Delta\Delta) < \frac{\varepsilon}{3}\|h\|$$

Portanto, se $h \in E / \|h\| < \delta$:

$$\| f(x+h) - f(x) - g\cdot h \| < \varepsilon \|h\|$$

donde f é derivável em x e $f'(x) = g$. #

Questão 7:

(1) Sejam $x_0 \in U$ e $\varepsilon > 0$.

$$V \doteq \{ (x,t) \in U \times [a,b] \,/\, \| f(x,t) - f(x_0,t) \| < \varepsilon \}$$

é aberto em $U \times [a,b]$ (pois $(x,t) \mapsto \| f(x,t) - f(x_0,t)\|$ é contínua) e o compacto $\{x_0\} \times [a,b] \subset V$.

Podemos, então, tomar $\delta > 0 \,/\, B_\delta(x_0) \times [a,b] \subset V$; assim,

$$\forall x \in B_\delta(x_0),\ \forall t \in [a,b] : \| f(x,t) - f(x_0,t) \| < \varepsilon,$$

donde $\forall x \in B_\delta(x_0) : \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leq \int_a^b \| f(x,t) - f(x_0,t) \| \, dt <$

$< \varepsilon\cdot(b-a)$ $\therefore$ φ contínua em x_0

(2) Tem-se, $\forall x \in U$, $\forall h \in \mathbb{R} / x + h e_i \in U$:

$$\| \varphi(x + h e_i) - \varphi(x) - h \int_a^b D_i f(x,t)\, dt \| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \| f(x + h e_i, t) - f(x,t) - h D_i f(x,t) \| \, dt \overset{\text{des. valor médio}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_a^b \sup_{\xi \in]0,h[} \| D_i f(x + \xi e_i, t) - D_i f(x,t) \| \, |h| \, dt \quad (*)$$

Fixe $x \in U$; dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de $D_i f$ e pela compacidade de $[a,b]$, podemos, como na parte (1), escolher $\delta > 0$ t.q. $B_\delta(x) \subset U$ e $\forall y \in B_\delta(x)$, $\forall t \in [a,b]$, $\| D_i f(y,t) - D_i f(x,t) \| < \varepsilon$. Assim, se $|h| < \delta$, segue-se de $(*)$ que

$$\| \varphi(x + h e_i) - \varphi(x) - h \int_a^b D_i f(x,t)\, dt \| < \varepsilon |h| (b-a)$$

donde $\exists D_i \varphi(x) = \int_a^b D_i f(x,t)\, dt$. O fato de ser $D_i f$ contínua e a parte (1) implicam $U \xrightarrow{D_i \varphi} \mathbb{R}^m$ contínua.

#