MAT5711 - Cálculo Avançado - IME - 2010
Prof. Gláucio Terra
P2 - 13/05/2010

Nome:________________________________ | Nota:

Assinatura:____________________________

ESCOLHA AS QUESTÕES DA PROVA DE MODO A SOMAR 10 PONTOS.
BOA PROVA!!

1-) (2 ptos.) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$, $p > n$. Mostre que f não é injetiva.

2-) (2 ptos.) Seja E uma álgebra de Banach e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $1 \in \mathsf{E}$ tal que, para todo $Y \in \mathcal{U}$, existe $X \in \mathsf{E}$ tal que $X^k = Y$. Além disso, pode-se escolher $X = X(Y)$ de forma a se definir uma aplicação de classe C^∞ nesta vizinhança.

3-) (2 ptos.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $(\exists k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1, \forall t \in \mathbb{R})\ |f'(t)| \leqslant k$. Defina $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\phi(x,y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big)$. Mostre que ϕ é um difeomorfismo C^1 de $\mathbb{R}^2$ sobre si mesmo.

4-) (2 ptos.) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto convexo e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ derivável. Suponha que, $\forall x \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\langle f'(x) \cdot v, v\rangle > 0$. Mostre que: (i) f é injetiva, (ii) se $f \in \mathsf{C}^1$, então f é um difeomorfismo de $\mathcal{U}$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$. Dê um exemplo em que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ e f não é sobrejetiva.

5-) (2 ptos.) Toda superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ é, localmente, o gráfico de uma aplicação de classe C^{k}.

6-) (2 ptos.) Toda superfície de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ é, localmente, a imagem inversa de um valor regular por uma aplicação de classe C^{k}.

7-) (2 ptos.) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ e de posto constante r. Dado $c \in f(\mathcal{U})$, mostre que $f^{-1}(c)$ é uma superfície de codimensão r e classe C^{k} em $\mathbb{R}^n$. Além disso, para todo $p \in f^{-1}(c)$, $\mathsf{T}_p\mathsf{M} = \ker f'(p)$.

8-) (4 ptos.) Seja $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ de classe $\mathsf{C}^{\mathsf{k}\geqslant 1}$ no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $f \circ f = f$. Então:

1. f tem posto constante numa vizinhança de $\mathsf{M} \doteq f(\mathcal{U})$.
2. Se $f : \mathcal{U} \to \mathsf{M}$ for uma aplicação aberta (considerando-se em $\mathsf{M} \subset \mathcal{U}$ a topologia relativa), então M é uma superfície de classe C^{k} cuja dimensão é igual ao posto de f em M.