

Lema : ① U, V abertos em E e F , ^{normais} respectivamente

$$\begin{cases} f: U \rightarrow V \text{ homeomorfismo} \\ a \in U, f \text{ derivável em } a \end{cases}$$

② f é equivalente:

(i) f^{-1} derivável em $b = f(a)$

(ii) $f'(a) \in \text{Isom}(E, F)$

Em caso afirmativo, $(f^{-1})'(b) = f'(a)^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Com efeito, $f^{-1} \circ f = \text{id}_U$ e $f \circ f^{-1} = \text{id}_V$ $\therefore$ (r.c.)

$\therefore f'(a) \circ (f^{-1})'(b) = \text{id}_F$ e $(f^{-1})'(b) \circ f'(a) = \text{id}_E$

Logo $f'(a) \in \text{Isom}(E, F)$ e $(f^{-1})'(b) = f'(a)^{-1}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Seja, $\forall v \in F / b + v \in V$, $r(v) \doteq \underbrace{f^{-1}(b+v)}_{\neq} - f^{-1}(b) - f'(a)^{-1} \cdot v$

$\vdash r(v) = o(\|v\|)$

Como f é der. em a , tem-se:

$\forall h \in E / a+h \in U$, $R(h) \doteq \underbrace{f(a+h)}_{=a} - f(a) - f'(a) \cdot h$,

$R(h) = o(\|h\|)$.

Pondo $h(v) \doteq f^{-1}(b+v) - f^{-1}(b)$, $\forall v \in F / b+v \in V$,

tem-se $f(a+h(v)) - f(a) = b+v - b = v$, Logo, $\forall v \in F$:

$r(v) = h(v) - f'(a)^{-1} \cdot [f(a+h(v)) - f(a)] =$

$$= h(v) - f'(a)^{-1} \cdot [f'(a) \cdot h(v) + R(h(v))] = \quad (2)$$

$$= - f'(a)^{-1} \cdot R(h(v))$$

Donde $\frac{r(v)}{\|v\|} = - f'(a)^{-1} \cdot \frac{R(h(v))}{\|h(v)\|} \cdot \frac{\|h(v)\|}{\|v\|}$

$$\forall v \in E \setminus \{0\} \text{ t.q. } b+v \in V.$$

Como $\lim_{v \rightarrow 0} h(v) = 0$ e $f'(a)^{-1}$ é contínua, tem-se

$$\lim_{v \rightarrow 0} f'(a)^{-1} \cdot \frac{R(h(v))}{\|h(v)\|} = 0$$

Resta mostrar que $\frac{\|h(v)\|}{\|v\|}$ é limitada numa vit. de 0.

$$\forall h \in E \setminus \{0\}, \left\| f'(a) \cdot \frac{h}{\|h\|} \right\| \geq \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|} > 0$$

Obs. : Se $A \in \text{Hom}(E, F)$, $\forall v \in E \setminus \{0\}$:

$$\left\| A \cdot \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| A \cdot \frac{A^{-1}w}{\|A^{-1}w\|} \right\| = \left\| \frac{w}{\|A^{-1}w\|} \right\| = \frac{1}{\frac{\|A^{-1}w\|}{\|w\|}} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$$

$\frac{\|A^{-1}w\|}{\|w\|} \leq \|A^{-1}\|$

Tome $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\|f'(a)\|^{-1}}$; $\exists \delta > 0 / B_\delta(a) \subset U$ e $\|R(h)\| < \varepsilon \|h\|$

ie $\|h\| < \delta$. Logo, se $h \in E \setminus \{0\}$ e $\|h\| < \delta$:

$$\|f'(a) \cdot h\| - \leq \|f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h\| < \varepsilon \|h\|$$

$$= \|f(a+h) - f(a)\| \therefore \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} > \|f'(a) \cdot \frac{h}{\|h\|}\| - \varepsilon \geq$$

(3)

$$\geq \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|} - \varepsilon = \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|} - \frac{1}{2\|f'(a)^{-1}\|} =$$

$$= \frac{1}{2\|f'(a)^{-1}\|} > 0$$

Tomemos $\delta' > 0$ / $B_{\delta'}(b) \subset V$ e t.q. $\forall v \in F / \|v\| < \delta'$

tem-se $\|h(v)\| = \|f^{-1}(b+v) - f^{-1}(b)\| < \delta$. Então,

se $0 < \|v\| < \delta'$:

$$\frac{\|f^{-1}(b+v) - f^{-1}(b)\|}{\|v\|} = \frac{\|h(v)\|}{\|f(a+h(v)) - f(a)\|} =$$

$$\leq 2\|f'(a)^{-1}\|$$

$$= \frac{1}{\frac{\|f(a+h(v)) - f(a)\|}{\|h(v)\|}} \geq \frac{1}{2\|f'(a)^{-1}\|} > 0$$

Logo $v \in F \setminus \{0\} / \|v\| < \delta' \mapsto \frac{f^{-1}(b+v) - f^{-1}(b)}{\|v\|}$ e'

limitado, como afirmado. #

Corolário:

(H) E, F e.n.

$$u \overset{a,b}{\subset} E, v \overset{a,b}{\subset} F$$

$$f: U \rightarrow V \text{ homeo } C^1$$

$$(1) f \text{ é difeo } C^1 \Leftrightarrow (\forall x \in U) f'(x) \in \text{Isom}(E, F)$$

Dem.: $(\Rightarrow)$ trivial pelo lema anterior

$(\Leftarrow)$ Pelo lema, $(\forall y \in V) f^{-1}$ é derivável em y

i.e. $f^{-1}: V \rightarrow U$ é derivável

Além disso, $(f^{-1})' = I \circ f' \circ f^{-1}$, onde

$$I: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F, E) \quad \text{é contínua (lema abaixo)}$$
$$X \mapsto X^{-1}$$

$$\therefore (f^{-1})': V \rightarrow \mathcal{L}(F, E) \text{ é contínua. } \#$$

Obs.: o mesmo cor. vale d/ C^k no lugar de C^1 ; o argumento é o mesmo.

Lema: $I: \mathcal{L}_0(E, F) \rightarrow \mathcal{L}_0(F, E)$ é C^∞ .

$$X \mapsto X^{-1}$$

Per.: Seja $h \in \text{Iso}(F, E)$

Defina $L_h : \text{Iso}(E, F) \rightarrow \text{Iso}(E)$, $R_h : \text{Iso}(E) \rightarrow \text{Iso}(F)$
 $X \mapsto h \circ X$, $Y \mapsto Y \circ h$

L_h e R_h são C^∞ , pois são restrições de apl. lin. contínuas.

Tem-se $\forall X \in \text{Iso}(E, F) : X^{-1} = (h \circ X)^{-1} \circ h =$

$$= R_h \circ I_E \circ L_h(X)$$

i.e. $I = R_h \circ I_E \circ L_h \quad \therefore C^\infty$

$$I'(X) \cdot \sigma = R_h \cdot I'_E(hX) \cdot L'_h(X) =$$

$$= R_h \cdot (-(hX)^{-1} L'_h(\sigma) (hX)^{-1}) =$$

$$= (-X^{-1} h^{-1} h \sigma X^{-1} h^{-1}) h = -X^{-1} \sigma X^{-1}$$

Teorema do Ponto Fixo e Contrações

(H) (X, d) e.m. completo

$f : X \rightarrow X$ contração ($\exists \alpha < 1$) ($\forall p, q$) $d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p, q)$

(I) (i) $\exists ! a \in X$ pto. fixo de f

(ii) $\forall x_0 \in X$, a seq. $(x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots)$
 converge p/ a .

Dem.:

6

(1) Unicidade

Suponha $a, b \in X$ pto. fixos de f . Tem-se:

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a, b) \therefore (1 - \lambda) d(a, b) \leq 0 \therefore d(a, b) = 0$$

(2) Existência

Seja $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida indutivamente por

$$x_0 \doteq x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n) \end{array} \right. x_{n+1} \doteq f(x_n)$$

$$\text{Tem-se: } d(x_1, x_0) = d(f(x_0), f(x_0)) \leq \lambda d(x_0, x_0)$$

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_1)) \leq \lambda^2 d(x_1, x_0)$$

...

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \forall n, m: d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \dots + \\ &\quad + d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0) + \lambda^{n+1} d(x_1, x_0) + \dots + \lambda^{n+m-1} d(x_1, x_0) \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \dots + \lambda^{n+m-1}) d(x_1, x_0) = \lambda^n \left(\frac{1 - \lambda^m}{1 - \lambda} \right) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$n, m \rightarrow \infty \rightarrow 0$

Logo $(x_n)_n$ é de Cauchy

$$\therefore \exists a \in X / x_n \rightarrow a$$

$$\text{Como } f \text{ é contínua, } f(x_n) \rightarrow f(a) \quad \therefore a = f(a). \quad \#$$

x_{n+1}

X e.m.c., $f: X \rightarrow Z$ λ -cont.

$$B_r[a] \subset X$$

Queremos uma condição λ que $f(B_r[a]) \subset B_r[a]$

$$\text{Dado } x \in B_r[a], \text{ tem-se: } d(f(x), a) \leq \overbrace{d(f(x), f(a))}^{\leq \lambda r} + d(f(a), a)$$

$$\therefore \text{ se } d(f(a), a) \leq (1-\lambda)r, \text{ tem-se } (\forall x \in B_r[a]) d(f(x), a) \leq r$$

i.e. $f(B_r[a]) \subset B_r[a]$. Além, demonstramos o:

Lema: (I) X e.m. compl., $f: X \rightarrow Z$ λ -contração
 $B_r[a] \subset X, d(f(a), a) \leq (1-\lambda)r$

(II) f tem um único pto. fixo em $B_r[a]$.

Teorema (da Perturbação da Identidade):

(I) E Banach, $U \subset E$, $\varphi: U \rightarrow E$ λ -contração

(II) $f: U \rightarrow E$ é um homeomorfismo sobre
 $x \mapsto x + \varphi(x)$ o aberto $f(U) \subset E$.

Além disso, se $U=E$, $f(U)=E$.

Dem.:

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| - \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geq (1-\lambda)\|x - y\|$$

$\therefore f$ é injetiva e $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ é K -Lipschitz, $K = \frac{1}{1-\lambda}$.

Resta mostrar que $f(U)$ é aberto em E .

Seja $b = f(a)$. $\Gamma \vdash \exists B_p(b) \subset f(U)$. Ou seja, dado $y \in f(U)$ próx. de b , queremos resolver $f(x) = y$, i.e. queremos encontrar um

pto fixo de $\xi_y(x) = y - f(x) + x = y - \varphi(x)$, $\xi_y: U \rightarrow E$ (8)

Como ξ_y é λ -contração, basta impor $\|\xi_y(a) - a\| \leq (1-\lambda)r$

p/ algum $r / B_r[a] \subset U$. Ora, $\|\xi_y(a) - a\| = \|y - \varphi(a) - a\| =$
 $= \|y - f(a)\| = \|y - b\|$. basta impor $\|y - b\| \leq (1-\lambda)r$.

Tomemos $r > 0 / B_r[a] \subset U$, e $\lambda = (1-\lambda)r$. Afirma-se
que $B_{\lambda}[b] \subset f(U)$. Com efeito, todo $y \in B_{\lambda}[b]$, tome

$$\begin{aligned} \xi_y: U &\rightarrow E \\ x &\mapsto y - f(x) + x = y - \varphi(x) \end{aligned}$$

$$\text{Tem-se } \|\xi_y(a) - a\| = \|y - b\| \leq \lambda = (1-\lambda)r.$$

Logo, pelo lema, $\xi_y(B_r[a]) \subset B_r[a]$ e ξ_y tem um
único pto. fixo $x \in B_r[a]$, donde $y - f(x) \in f(B_r[a]) \subset f(U)$.

Isso mostra que b é pto interior de $f(U)$, logo $f(U)$ é
aberto em E .

Além disso, se $U = E$, $(\forall r > 0) B_r[a] \subset U$, donde
 $(\forall \lambda > 0) B_{\lambda}[b] \subset f(U) \therefore E = \bigcup_{\lambda > 0} B_{\lambda}[b] \subset f(U)$, donde $f(U) = E$. #

Corolário (perturbação de um Isomorfismo):

(M) E Banach, $T \in L(E, E)$, $U \subset E$, $\varphi: U \rightarrow E$ 2-Lipschitz
 $f: U \rightarrow E$
 $x \mapsto T \cdot x + \varphi(x)$
 em $\|T^{-1}\|_2 < 1$

(T) f é homeomorf. sobre $f(U) \subset E$
 $f(U) = E$ e $U = E$

Dem.:

$$\bar{f} = T^{-1} \circ f : U \rightarrow E$$

$$x \mapsto x + T^{-1} \circ \varphi(x)$$

é uma perturbação da identidade; basta aplicar o teorema anterior. #

Teorema da Aplicação Inversa

(M) E, F Banach, $U \subset E$, $f: U \xrightarrow{C^1} F$, $a \in U$, $f'(a) \in \text{Iso}(E, F)$

(T) f é um difeo local em a , i.e.
 $\exists V \subset U$ viz. aberta de a / $f(V) \subset F$ e $f: V \xrightarrow{\text{difeo}} f(V)$

Dem.:

Seja $\bar{f} = f'(a)^{-1} \circ f : U \rightarrow F$

$\bar{f} \in C^1$ e $(\forall x) \bar{f}'(x) = f'(a)^{-1} \circ f'(x) \therefore \bar{f}'(a) = \text{id}$

$\bar{f}(x) - \bar{f}(a) = x - a + r(x-a)$, $r(x-a) = o(\|x-a\|)$

$\therefore \varphi(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}(a) + a = x + r(x-a)$ é uma perturbação

da identidade em $U = B_\rho(a)$ (onde $\rho > 0$ t.q.

(10)

$(x-a)^{-\alpha}$ -Lipschitz em $B_\rho(a)$, com $\alpha < 1$, $\exists$ tal ρ pr qe

$\bar{f} \in C^1$ $\therefore$ é fortemente diferenciável em a).

Então $\bar{f}$ difere de f por uma translação

Então $\bar{f}|_U : U \rightarrow \bar{f}(U) \subset E$ é homeomorfismo,

e $\bar{f}'(a) = id_E \in \mathcal{L}(E)$; portanto, reduzindo U ,

é necessário, que $(\forall x \in U) \bar{f}'(x) \in \mathcal{L}(E)$ (pois $\bar{f}'$ é
contínuo e $\mathcal{L}(E)$ é aberto em $\mathcal{L}(E)$). Então

$\bar{f}|_U : U \rightarrow \bar{f}(U)$ é difeo.

$\bar{f}$

Assim, $f = f'(a) \circ \bar{f}$ é difeo $U \rightarrow V \doteq f'(a)(\bar{f}(U))$.

#

Teo. [do Fc'z implícitas]:

(H) E, F, G Banach

$$\begin{cases} U \overset{ab}{\subset} E \times F, & f: U \overset{C^1}{\rightarrow} G \\ (a,b) \in U, & f(a,b) = 0, \quad \partial_2 f(a,b) \in \text{Iso}(F, G) \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} \exists V \subset U \text{ viz. aberta de } (a,b) \\ \exists W \subset E \text{ viz. aberta de } a \\ \exists g: W \overset{C^1}{\rightarrow} F \text{ tais que sejam equivalentes:} \end{cases}$

(i) $(x,y) \in V \Rightarrow f(x,y) = 0$

(ii) $x \in W \Rightarrow y = g(x)$

Notar poldorras, $f^{-1}(0) \cap V = \text{gr } g$.

Dem.: Seja $F: U \overset{C^1}{\rightarrow} E \times G$
 $(x,y) \mapsto (x, f(x,y))$

Tem-se, $((x,y) \in U, \forall (h,k) \in E \times F) \quad DF(x,y) \cdot (h,k) =$
 $= \partial_1 F(x,y) \cdot h + \partial_2 F(x,y) \cdot k = (h, \partial_1 f(x,y) \cdot h + \partial_2 f(x,y) \cdot k)$

Afirmo que $DF(a,b) \in \text{Iso}(E \times F, E \times G)$.

$\nabla h = h_1$

$\partial_1 f(a,b) \cdot h + \partial_2 f(a,b) \cdot k = k_1 \Leftrightarrow k = \partial_2 f(a,b)^{-1} \cdot [k_1 - \partial_1 f(a,b) \cdot h_1]$

com efeito, $DF(a,b)$ é cont. e tem inversa dada por:

$$(h_1, k_1) \in E \times G \mapsto (h_1, \partial_2 f(a, b)^{-1} \cdot [k_1 - \partial_1 f(a, b) \cdot h_1]) \in E \times F. \quad (12)$$

pelos teos. da aplicação inversa, $\exists V \subset U$ viz. aberta
 $\ni (a, b)$, $\exists W_1 \subset E \times G$ viz. aberta $\ni (a, 0)$ t.q.

$F: V \rightarrow W_1$ é difeo C^1 . Seja $G = F^{-1}: W_1 \rightarrow V$;
 Como $F(x, y) = (x, f(x, y))$, G é da forma
 $(x, z) \mapsto (x, g_1(x, z))$, onde $g_1: W_1 \xrightarrow{C^1} F$.

Como $G = F^{-1}$, são equivalentes:

(i') $(x, y) \in V$ e $f(x, y) = z$

(ii') $(x, z) \in W_1$ e $g_1(x, z) = y$.

P/ $z=0$, (i') é o cond. (ii) da enunciação. Vejamos o

que ocorre d/ (ii'). Identificando $E \equiv E \times \{0\} \subset E \times G$,

$W \equiv W_1 \cap (E \times \{0\})$ é uma viz. aberta de $a \in E$ (pois $(a, 0) \in W_1$).

Ponha $g: W \rightarrow G$, tem-se $g \in C^1$ e (ii') para
 $x \mapsto g_1(x, 0)$

$z=0$ se torna:

(ii) $x \in W$ e $y = g(x)$. $\#$

A demonstração acima mostra, na verdade, um enunciado mais geral:

Teo.: (H) $\left\{ \begin{array}{l} E, F, G \text{ Banach} \\ U \overset{ab}{\subset} E \times F, \quad (a,b) \in U \\ f: U \overset{c}{\rightarrow} G, \quad f(a,b) = 0 \\ \partial_2 f(a,b) \in \text{Iso}(F, G) \end{array} \right.$

(I) $\exists V \overset{ab}{\subset} U$ vit. aberta de (a,b) , $\exists W \overset{ab}{\subset} E$ vit. de a ,
 $\exists Z$ vit. ab. de 0 em G , $\exists g: W \times Z \overset{c}{\rightarrow} F$
 tais que sejam equivalentes:

(i) $(x,y) \in V$ e $z = f(x,y)$

(ii) $(x,z) \in W \times Z$ e $y = g(x,z)$

i.e. $\forall z \in Z, f^{-1}(z) \cap V = \text{gr } g(\cdot, z)$.

Corolário: Com a mesma notação do teorema, seja
 $W' \overset{ab}{\subset} W$ vit. conveja de a . Então $g: W' \rightarrow F$ é
 a única função que satisfaz:

(1) é contínua $W' \rightarrow F$ e $g(a) = b$

(2) $\forall x \in W', (x, g(x)) \in U$ e $f(x, g(x)) = 0$.

Dem.: Seja $h: W' \rightarrow F$ contínua / $h(a) = b, (\forall x \in W') (x, h(x)) \in U$
 e $f(x, h(x)) = 0$.

(i) $\{x \in W' / h(x) = g(x)\} \overset{A}{\neq} \emptyset$ é fechado

(ii) é aberto: seja $x_0 \in A$. Então $(x_0, g(x_0)) = (x_0, h(x_0)) \in V$; como

h é contínua, $\exists W''$ viz. aberta de x_0 em W' t. q. (K)

$(\forall x \in W'') (x, h(x)) \in V$ e, como $f(x, h(x)) = 0$, reduz-se

↳ teorema qe $(\forall x \in W'') g(x) = h(x)$. Assim, A é aberto.

#