

Lubrificação e Teorema do Posto

Def.: $\text{In}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \doteq \{ f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) / f \text{ injetiva} \}$

$\text{Sub}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \doteq \{ f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) / f \text{ sobre} \}$

Para $r \in \{0, \dots, p = \min\{m, n\}\}$:

$\text{rk}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \doteq \{ f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) / \text{posto } f = r \}$

Lema: Seja $\text{rk} : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$
 $A \longmapsto \text{posto } A = \text{rk } A$

Então rk é semi-continua inferiormente (i.e. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\text{rk}^{-1}(a, \infty)$ é aberto).

Dem.: (1) $\text{Im } \text{rk} \subset \{0, \dots, p\}$

(2) Suponha $\text{rk } A = r$. Identificando $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \equiv M_{m,n}(\mathbb{R})$, existe um subdeterminante menor de ordem r de A não nulo. Como tal menor é uma função contínua $M_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (pois é polinomial), existe uma vizinhança U de A na qual ele não se anula, donde, $\forall B \in U$, $\text{rk } B \geq r$. $\neq$

Corolário: $\text{In}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $\text{Sub}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ são abertos em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Def. : Tem-se $\begin{cases} A \in I_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ A \in \text{Sub}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rk } A = n \\ \text{rk } A = m \end{cases}$
#

Def. : $f : U \xrightarrow[\mathbb{C}]{\text{ab}} \mathbb{R}^m$ $C^{K \geq 1}$ dit-se

(i) imersão se $(\forall x \in U) \ f'(x) \in I_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

(ii) submersão se $(\forall x \in U) \ f'(x) \in \text{Sub}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

(iii) de posto constante se $\exists r \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$
t.q. $(\forall x \in U) \ \text{rk } f'(x) = r$.

Em particular, imersões e submersões são aplicações de posto constante; são chamadas aplicações de posto máximo.

Obs. 1 : Se $f : U \xrightarrow[\mathbb{C}]{\text{ab}} \mathbb{R}^m$ de classe C^1 e, em $x_0 \in U$:

(i) $f'(x_0) \in I_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, então, por ser $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ contínua e $I_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aberto em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, segue-se que $f'(x) \in I_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ numa viz. de x_0 , i.e. f é uma imersão numa viz. de x_0 .

(ii) $f'(x_0) \in \text{Sub}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, então f é uma submersão numa viz. de x_0 .

Exemplos :

1/ $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ é imersão
 $x \longmapsto (x, 0)$

2/ $\mathbb{R}^{n+k} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é submersão
 $(x, y) \longmapsto x$

(3)

Mostraremos que, localmente, e a menos de composições com difeomorfismos, toda imersão é como (1) e toda submersion é como (2). Isto também vale p/ aplicações em abertos de espaços de Banach, desde que usemos as seguintes definições, sobre E, F Banach:

$In(E, F) \equiv \{ f \in L(E, F) / f \text{ injetiva, Im } f \text{ fechada e com compl. fechado} \}$

$Sub(E, F) \equiv \{ f \in L(E, F) / f \text{ sobre e Ker } f \text{ com compl. fechado} \}$

Teorema [Forma Local da Imersão]:

Seja $f: M \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^{k,1}} \mathbb{R}^{n+m}$ imersão. Então $x_0 \in M$, $\exists V$ viz. aberta de x_0 em M , W viz. aberta de 0 em $\mathbb{R}^m$, Z viz. aberta de $f(x_0)$ em $\mathbb{R}^{n+m}$ e $\phi: Z \xrightarrow{C^k} V \times W$ difeo t.q.
 $f(V) \subset Z$ e $\phi \circ f: V \rightarrow V \times W$
 $x \mapsto (x, 0)$

Pen.: Seja E um complementar de $f'(x_0) \cdot \mathbb{R}^n$; tem-se $E \cong \mathbb{R}^m$.

Tome $M \times E \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}^{n+m}$
 $(x, y) \mapsto f(x) + y$

$\Psi \in C^k$ e $\Psi'(x_0, 0) \cdot (h, k) = \partial_1 \Psi(x_0, 0) \cdot h + \partial_2 \Psi(x_0, 0) \cdot k =$
 $= f'(x_0) \cdot h + k$ é sobre, pois $f'(x_0) \cdot \mathbb{R}^n + E = \mathbb{R}^{n+m}$

Então $\Psi'(x_0, 0) \in Iso(\mathbb{R}^n \times E, \mathbb{R}^{n+m})$, donde, pelo teorema da

aplicação inversa, $\exists V \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$, $\exists W \in \mathcal{O}_0(E)$, $\exists Z \in \mathcal{O}_{f(x_0)}(\mathbb{R}^{n+m})$ (4)

Ex. g. $\Psi : V \times W \xrightarrow{C^k} Z$ difeo. Como $(\forall x \in V) \Psi(x, 0) = f(x)$,

segue-se $f(V) \subset Z$ e $\Psi^{-1}_0 \circ f : x \mapsto (x, 0)$. Basta

tomar, então, $\phi = \Psi^{-1}_0 \circ f$. #

Corolário: Com a mesma hipótese, f é localmente injetiva;
dém disso, $(\forall x_0 \in U) \exists V \in \mathcal{O}_{x_0}(U) / f|_V$ é injetiva e

$f|_V^{-1} : f(V) \rightarrow V$ é a restrição de uma aplicação
de classe C^k definida num aberto $Z \supset f(V)$ de
 $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dem.: Com a mesma notação da demonstração, $f|_V$ é
injetiva e, denotando por $\pi_1 : V \times W \rightarrow V$ a projecção
no 1.º factor, tem-se $\pi_1 \circ \phi : Z \rightarrow V$ C^k e $\forall x = f(x) \in$
 $\in f(V)$, $\pi_1 \circ \phi(x) = \pi_1 \circ \phi \circ f(x) = x$, donde $\pi_1 \circ \phi|_{f(V)} =$
 $= f|_V^{-1}$. #

Teo. [forma local da submersão]:

(5)

(H) $f: U \subset \mathbb{R}^{m+n} \xrightarrow{C^k, k \geq 1} \mathbb{R}^n$ submersão, $x_0 \in U$.

(i) $\exists z \in \mathcal{Z}_{x_0}(U)$, $\exists v \in \mathcal{Z}_{f(x_0)}(\mathbb{R}^n)$, $\exists w \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^m)$,

$\exists \phi: V \times W \xrightarrow{\text{difeo } C^k} \mathcal{Z} \quad \text{e.g.}$

$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{f} & V \\ \phi \downarrow & \nearrow \pi_1 & \\ V \times W & & \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ob.:} \text{ Podemos tomar } W \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^m); \text{ em efeito,} \\ \text{se } W \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^m) \text{ como no enunciado, tomamos } w_0 \in W, \\ W' = \tau_{w_0}(W) \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^m) \text{ e } V \times W' \xrightarrow{\text{id} \times \tau_{w_0}} V \times W. \\ \text{translamos por } -w_0 \end{array} \right.$

Dem.: Seja $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ complementar a $\text{Ker } f'(x_0) = F$. Tome

$$U \subset \mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \times F$$

$$x = (x', x'') \mapsto (f(x', x''), x'')$$

$$\text{Então } \psi'(x'_0, x''_0) \cdot (h, k) = (\partial_1 f(x'_0, x''_0) \cdot h + \partial_2 f(x'_0, x''_0) \cdot k, k)$$

$\therefore \psi'(x'_0, x''_0)$ tem inversa dada por

$$(h_1, k_1) \mapsto (\partial_1 f(x'_0)^{-1} \cdot (h_1 - \partial_2 f(x'_0, x''_0) \cdot k_1), k_1)$$

Note que $\partial_1 f(x'_0) \in \text{Iso}(E, \mathbb{R}^n)$, pois $E = \text{Ker } f'(x_0)$ e

$f'(x_0)$ é idre $\therefore A'(x_0)|_E = \partial_1 f(x'_0): E \rightarrow \mathbb{R}^n$ iso.

Como $\psi'(x_0)$ é iso, pelo teo. aplicação inversa

$\exists v \in \mathcal{Z}_{f(x_0)}(\mathbb{R}^n)$, $\exists w \in \mathcal{Z}_{x''_0}(\mathbb{R}^m)$, $\exists z \in \mathcal{Z}_{x_0}(U)$

e.g. $\psi: \mathcal{Z} \rightarrow V \times W$ difeo C^k . Tome $\phi = \psi^{-1}$.

Afirmo que $f \circ \phi = \pi_1$; de fato, $\pi_1 \circ \phi^{-1} = \pi_1 \circ \psi = f$. #

Corolário : Com a mesma hipótese, f é aberto. ⑥

Com efeito, usando a mesma notação da km., $f|_Z$ é aberto; ou seja, $\forall x_0 \in U, \exists z \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$ t.q. $f|_z$ é aberto. —x—

Teorema [do Rito] :

- (H) $f : U \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^{m+r}$ é posto de r , $x_0 \in U$
- (T) $\exists z \in \mathcal{O}_{x_0}(U), z' \in \mathcal{O}_{f(x_0)}(\mathbb{R}^{m+r})$ e dois ϕ, ψ qe fazem comutar o este diagrama

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{f} & z' \\ \phi \uparrow & & \downarrow \psi \\ V \times W & \longrightarrow & V \times W' \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$

onde $V \in \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^r), W \in \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^n), W' \in \mathcal{O}_0(\mathbb{R}^m)$.

Dem. : Sejam $E' = \text{Im } f'(x_0)$, F' complementar de E' em $\mathbb{R}^{m+r}$ e $\pi_1 : \mathbb{R}^{m+r} = E' \oplus F' \longrightarrow E'$ projeção no primeiro fator. Então $(\pi_1 \circ f)'(x_0) = \pi_1 \circ f'(x_0)$ é sobre E' $\therefore$ $\pi_1 \circ f$ é uma submersão numa vizinhança de x_0 , a qual

podemos supor ser U , reduzindo U se necessário. (7)

Pela forma local das submersões, $\exists V \in \mathcal{E}_{\pi_1 \circ f(x_0)}(E')$,
 $\exists W \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^n)$, $\exists z \in \mathcal{E}_{x_0}(U)$ e $\phi: V \times W \xrightarrow{\text{Lifes } C^k} z$

é. q.

$$\begin{array}{ccc} & z & \xrightarrow{\pi_1 \circ f} V \\ \phi \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ V \times W & \xrightarrow{(y, w)} & y \end{array}$$

Então $\exists \xi: V \times W \xrightarrow{C^k} F' \quad / \quad V \times W \xrightarrow{f \circ \phi} \mathbb{R}^{n+r} = E' \oplus F'$
 $(y, w) \mapsto (y, \xi(y, w))$

Podemos supor, sem perda de generalidade, W conexo.
 Como f tem posto constante r e ϕ é difeo,
 segue-se que $f \circ \phi$ tem posto constante r . Além disso,
 $\forall (y, w) \in V \times W, \forall (h, k) \in E' \times \mathbb{R}^n$:

$$(f \circ \phi)'(y, w) \cdot (h, k) = (h, \partial_1 \xi(y, w) \cdot h + \partial_2 \xi(y, w) \cdot k)$$

Logo $(f \circ \phi)'(y, w) \cdot (E' \times \mathbb{R}^n) = [\text{id} \times \partial_1 \xi(y, w)] \cdot E' + \partial_2 \xi(y, w) \cdot \mathbb{R}^n$
 e a dimensão deste subespaço é igual a $r = \dim E'$
 se, e somente se, $\partial_2 \xi(y, w) \cdot \mathbb{R}^n = \{0\}$, i.e.

$\partial_2 \xi(y, w) = 0$. Como W é conexo, segue-se que,
 $\forall y \in V, \xi(y, \cdot): W \rightarrow F'$ é constante. Portanto,
 $\forall y \in V, \forall w \in W, f \circ \phi(y, w) = f \circ \phi(y, 0) = (y, \xi(y, 0))$.

Além disso, o mesmo argumento mostra que (8)

$$f \circ \phi|_{V \times \{0\}} : V \longrightarrow E' \oplus F' = \mathbb{R}^{m+r} \quad e'$$

uma imersão C^k . Pela forma local das imersões, podemos reduzir V , se necessário, e tomar $W' \in \mathcal{G}_0(\mathbb{R}^m)$, $Z' \in \mathcal{G}_{f(Z_0)}(\mathbb{R}^{m+r})$ e $\psi : Z' \longrightarrow V \times W'$ difeomorfismo C^k tal que $f(Z_0) = f \circ \phi(y_0, w_0)$.

Ex. g.

$$\psi \circ f \circ \phi|_{V \times \{0\}} : V \longrightarrow V \times W' \\ y \mapsto (y, 0)$$

Então $\forall (y, w) \in V \times W$, $\psi \circ f \circ \phi(y, w) = \psi \circ f \circ \phi(y, 0) = (y, 0)$, i.e.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Z' \\ \phi \uparrow & \curvearrowright & \downarrow \psi \\ V \times W & \longrightarrow & V \times W' \\ (y, w) & \mapsto & (y, 0) \end{array}$$

Aqui, $V \in \mathcal{G}_{\pi_1 \circ f(x_0)}(\widetilde{E'})$ (onde $\widetilde{E'} \cong \mathbb{R}^r$); para se obter uma viz. de $0 \in \mathbb{R}^r$, conforme o enunciado, basta compor com uma translação conveniente. #

Corolário 1 : $f : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^{n+r} \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^{m+r}$ é de posto constante se, e somente se, localmente for a composta de uma imersão C^k com uma submersão C^k .

Dem. : Com a notação do teorema, tome

$$\begin{cases} \pi : V \times W \rightarrow V \text{ proj. no primeiro fator} \\ i : V \rightarrow V \times W \\ b \mapsto b, 0 \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Z' \\ & \searrow \pi \circ \phi^{-1} & \nearrow \psi^{-1} \circ i \\ & V & \end{array}$$

e $\begin{cases} \psi^{-1} \circ i \text{ é imersão} \\ \pi \circ \phi^{-1} \text{ é submersão} \end{cases}$.

A recíproca é óbvia.

Corolário 2 : Seja $f : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^{n+r} \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^{m+r}$ de

posto constante r . Tem-se :

- (i) f é localmente injetiva se, e somente se, for uma imersão ;
- (ii) f é aberta se, e somente se, for uma submersão.

Dem.: Decorre do teorema do posto que:

(i) se $n > 0$, então f não é localmente injetiva; portanto, se f for localmente injetiva, então $n = 0$ e f é imersão. A recíproca já foi demonstrada.

(ii) se $m > 0$, então f não é aberta; portanto, se f for aberta, $m = 0$ e f é submersa. A recíproca já foi demonstrada. #

Prop.: Seja $f: U \xrightarrow{ab} \mathbb{C}^n \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^m$. Denote por A_r o interior do conjunto de pto. de U nos quais f tem posto r , para $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Então o aberto $A_0 \cup \dots \cup A_{p=\min\{m, n\}}$ é denso em U .

Dem.: Seja $V \subset U$ aberto. Como a função $U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$
 $x \mapsto rk f'(x)$
tem imagem finita, $\exists x_0 \in V$ ponto de máximo de ϕ , digamos, $rk f'(x_0) = r$. E, sendo ϕ semi-contínua inferiormente (pois f' é contínua e $rk: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente), $\exists W \in \mathcal{B}_{x_0}(V)$ t.q. ϕ é maior ou igual a r em W , logo igual a r , donde $W \subset A_r$. #

Corolário: Com a mesma hipótese, existe um aberto denso V em U t.q. f tem posto constante em cada componente conexa de V .

Dem.: Com efeito, basta tomar $V = A_0 \cup \dots \cup A_p$; como os abertos A_i são disjuntos, cada componente conexa de V está em algum A_i . $\neq$

Corolário: Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^m$.

- (i) Se f é localmente injetiva, então f é uma imersão num aberto denso de U .
- (ii) Se f é aberta, então f é uma submersão num aberto denso de U .

Dem.: Com efeito, com a mesma notação da proposição, temos:

- (i) $p = n$, $A_0 = \dots = A_{p-1} = \emptyset \therefore A_n$ é denso em U
- (ii) $p = m$, $A_0 = \dots = A_{p-1} = \emptyset \therefore A_m$ é denso em U . $\neq$